

**PARTE III**  
**RETI DI PROVA**  
**(frammento moltiplicativo)**

# 1 Un calcolo “naturale” per la logica lineare

Ci limitiamo a considerare il sistema  $MLL_0$  seguente:

$$\begin{array}{l} A, \sim A \text{ (Ax)} \quad \frac{\Gamma, A \quad \sim A, \Delta'}{\Gamma, \Delta} \text{ (cut)} \\ \frac{\Gamma, A \quad \Gamma', B}{\Gamma, \Gamma', A \otimes B} (\otimes) \quad \frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A \wp B} (\wp) \end{array}$$

Ci sono due ordini di ragioni per spiegare l'introduzione delle reti per questo calcolo:

- ★ trovare la “vera” prova che “sta dietro” le possibili versioni equivalenti (tipicamente derivanti dalla possibilità di permutare conservativamente l'ordine delle regole).

**Obiez.** Questa stessa ragione ha motivato storicamente la versione in deduzione naturale dei calcoli delle sequenze. Dunque, esistendo la versione in deduzione naturale anche per LL (vd. [11], cap. 6), per quale motivo non accontentarsi di essa?

- ★ eliminare certi aspetti discutibili legati alla formulazione usuale delle regole in deduzione naturale (che sono, in ordine di importanza: confusione tra premesse e conclusioni, aspetti di non località, arbitrarietà per l'intervento di formule “estranee” al contenuto logico della regola).

Nell'ordine, i tre “difetti” cui si accenna nel secondo dei due propositi sono esemplificati dalla regole seguenti:

$$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \\ \hline A \multimap B \quad (I\multimap) \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ A \quad A \multimap B \\ \hline B \quad (E\multimap) \end{array} \quad \begin{array}{c} [A], [B] \\ \vdots \\ A \otimes B \quad C \\ \hline C \quad (E\otimes) \end{array}$$

**NB:** la terza regola esemplifica tutti e tre le pecche suddette.

## 2 Teoria dei grafi: nozioni di base

★ Un *grafo*  $G$  è una struttura  $G := (V_G, E_G)$  dove:

- $V_G$  è un insieme finito e non vuoto, i cui elementi sono i *vertici* o *nodi* di  $G$ .
- $E_G$  è un insieme finito di coppie non ordinate di elementi distinti di  $V_G$ , i *bordi* o *legami* di  $G$  (vale dunque  $\{v, w\} \in E_G \Rightarrow v \neq w$ ).

★ Dato  $G := (V_G, E_G)$ , il *grado*  $\rho(v)$  di un vertice  $v \in V_G$  è il numero di bordi ad esso incidenti, ovvero:

$$\rho(v) = |\{\{v, w\} \mid w \in V_G\}|$$

★ Un grafo  $G' := (V_{G'}, E_{G'})$  è un *sottografo* di  $G$  (in simboli  $G' \subseteq G$ ), se  $V_{G'} \subseteq V_G, E_{G'} \subseteq E_G$ .

★ Dati due grafi  $G := (V_G, E_G), G' := (V_{G'}, E_{G'})$ , la loro *unione* o *giustapposizione* è il grafo  $G \cup G' = (V_G \cup V_{G'}, E_G \cup E_{G'})$ .

La loro *somma*, invece, è il grafo  $G + G' := (V_{G+G'}, E_{G+G'})$  definito da:

$$\begin{aligned} V_{G+G'} &:= V_G \cup V_{G'} \\ E_{G+G'} &:= E_G \cup E_{G'} \cup \{\{v, w\} \mid v \in V_G, w \in V_{G'}\} \end{aligned}$$

★ Dati  $G := (V_G, E_G)$  grafo,  $v \in V_G, e \in E_G$ , siano  $G - v = (V_{G-v}, E_{G-v}), G - e = (V_{G-e}, E_{G-e})$  i grafi rispettivamente definiti da:

$$\begin{aligned} V_{G-v} &:= V_G \setminus \{v\} \\ E_{G-v} &:= E_G \setminus \{\{v, w\} \mid w \in V_G\} \\ V_{G-e} &:= V_G \\ E_{G-e} &:= E_G \setminus \{e\} \end{aligned}$$

Le due definizioni si estendono in modo naturale a insiemi di vertici  $A \subseteq V_G$  e di legami  $B \subseteq E_G$  mediante le clausole:

$$\begin{aligned} G - A &:= \bigcup_{v \in A} G - v \\ G - B &:= \bigcup_{e \in B} G - e \end{aligned}$$

Poiché l'idea di fondo è di far corrispondere grafi a dimostrazioni, il caso che ci interessa è quello di grafi generati da nodi, ai quali corrispondono occorrenze di formule del linguaggio di  $MLL_0$  ed i cui bordi sono generati dalle inferenze delle derivazioni di tale sistema.

In un grafo  $G = (V_G, E_G)$  corrispondente in tal senso ad una derivazione, vale in particolare che  $\rho(v) \leq 3$  per ogni  $v \in V_G$  (ossia, ogni nodo è premessa di al massimo un legame, ed è conclusione di al massimo due). Vale:

- ★ una derivazione è rappresentabile come un albero binario;
- ★ in un albero ogni punto è *connesso*, tramite un percorso costruito a partire dai legami, ad un qualsiasi altro (ciò vale per la conclusione, dalla quale si può risalire a qualsiasi premessa, e vale per un qualsiasi nodo che non sia la conclusione poiché posso sempre “scendere” fino alla conclusione);
- ★ in un albero non è possibile costruire un *ciclo* percorso da un nodo  $v$  ad un nodo  $w$  ed un percorso, distinto dal primo, da  $w$  in  $v$  di nuovo (dato un nodo  $v$  ci sono due possibilità: o “si sale”, e allora si arriva fino agli assiomi dai quali non si può scendere al nodo in questione se non per lo stesso percorso, o “si scende” e si arriva alla conclusione da cui si dipartono solo percorsi distinti).

Ad un livello rigoroso, le proprietà dei grafi che ci interessano possono essere rese tramite le seguenti nozioni:

- ★ Dato un grafo  $G := (V_G, E_G)$ , un *cammino* in  $G$  è una successione  $c = c_1, \dots, c_n$  di coppie ordinate di vertici  $c_i = \langle v_i, w_i \rangle$  t.c. (i)  $\{v_i, w_i\} \in E_G$ , (ii)  $w_i = v_{i+1}$ , (iii)  $c_i \neq c_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ).
- ★ Dato un grafo  $G := (V_G, E_G)$  ed un cammino  $c = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, \langle v_n, w_n \rangle$  in  $G$ , un *percorso*  $p$  in  $G$  (associato a  $c$ ) è l'insieme:

$$p = \{\{v, w\} \mid \exists i. 1 \leq i \leq n \wedge \langle v, w \rangle = \langle v_i, w_i \rangle\}$$

- ★ Dato un grafo  $G := (V_G, E_G)$ , si indica con  $\mathcal{P}_G$  l'insieme dei percorsi in  $G$ . Si noti che dato  $p \in \mathcal{P}_G$  associato a  $c := c_0 = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, c_n = \langle v_n, w_n \rangle$ , e posto  $c^- := c_n^- = \langle w_n, v_n \rangle, \dots, c_0^- = \langle w_0, v_0 \rangle$  risulta in modo ovvio che  $c^-$ , il *duale* di  $c$ , è un cammino e che  $p$  è il percorso associato a  $c^-$  (dato un cammino esiste esattamente un percorso associato ad esso; dato un percorso esistono esattamente due cammini a cui esso è associato).
- ★ Dato  $p \in \mathcal{P}_G$  associato ad un cammino  $c := c_0 = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, c_n = \langle v_n, w_n \rangle$  si scrive  $v_p$  per  $v_0$ ,  $w_p$  per  $w_0$ , risp. la *partenza* e l'*arrivo* di  $c$ , e si pone  $\overline{v_p w_p} := p = \overline{w_p v_p}$ .  
(intuitivamente  $w \in \overline{v v'}$  sse un percorso che connette  $v$  e  $v'$  passa da  $w$ ).
- ★ Un grafo  $G := (V_G, E_G)$  è *connesso* se, per ogni  $v, v' \in V_G$  esiste un cammino  $c := c_0 = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, c_n = \langle v_n, w_n \rangle$  con  $v = v_p$  e  $v' = w_p$ .
- ★ Un cammino  $c = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, \langle v_n, w_n \rangle$  è *chiuso* o è un *ciclo* se  $v_0 = w_n$  (segue da (iii) della definizione di percorso,  $n > 1$ ).
- ★ Un grafo  $G := (V_G, E_G)$  è *aciclico* se per ogni cammino  $c := c_0 = \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, c_n = \langle v_n, w_n \rangle$  in  $G$ ,  $v_0 \neq w_0$ .

**Definizione 1** Un grafo  $G$  è un albero se e solo se  $G$  è connesso e aciclico.

**NB:** per gli scopi che ci si prefigge, è sufficiente confinarsi ad alberi binari, ossia grafi  $T = (V_T, E_T)$  t.c., per ogni  $v \in V_T$ ,  $\rho(v) \leq 3$ . Si dice inoltre che  $v \in V_T$  è *terminale* (e si scrive  $v \in TN(T)$ ) se  $\rho(v) \leq 2$ .

Valgono:

**Proposizione 1** Dato un albero  $T = (V_T, E_T)$  e  $v, w \in V_T$  esiste esattamente un  $p \in \mathcal{P}^G$  t.c.  $v = v_p, w = w_p$  (equiv. esistono esattamente due cammini,  $c$  e  $c^-$ , t.c.  $v = v_0$  e  $w = w_n$ ).

*Dim.* Supponiamo esistano due percorsi  $p, p' \in \mathcal{P}^G$  t.c.  $\cup p \cap \cup p' = \{v_p = v = v_{p'}, w_p = w = w_{p'}\}$  (ovvero  $p, p'$  distinti tranne che per partenza e arrivo). Dunque esistono due cammini  $c := \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, \langle v_n, w_n \rangle, c' := \langle v'_0, w'_0 \rangle, \dots, \langle v'_m, w'_m \rangle$  (a cui sono associati  $p$  e  $p'$  risp.) t.c.  $v_0 = v = v'_0, w_n = w = w_m, v_i \neq v'_j, w'_j$  ( $0 < i \leq n, 0 \leq j \leq m$ ),  $w_i \neq v'_j, w'_j$  ( $0 \leq i < n, 0 \leq j \leq m$ ). Segue, contro l'ipotesi che  $T$  è un albero, che  $c^* := c, c'^- (= \langle v_0, w_0 \rangle, \dots, \langle v_n, w_n \rangle, \langle w'_m, v'_m \rangle, \dots, \langle w'_0, v'_0 \rangle)$  è un ciclo. Da cui la tesi. ■

**Proposizione 2** Dato  $T = (V_T, E_T)$  albero e  $e = \{v, w\} \in E_T$ , allora (i) il grafo  $T - e$  non è connesso, (ii) esistono due alberi  $T_1, T_2$  t.c.  $T = T_1 \cup T_2$ .

*Dim.* (i) è un immediato corollario della proposizione 1. Posto  $A := \{v' \in V_T \mid \overline{vv'} \in \mathcal{P}^G \wedge w \notin \cup \overline{vv'}\}$  e  $A' := \{w' \in V_T \mid \overline{ww'} \in \mathcal{P}^G \wedge v \notin \cup \overline{ww'}\}$ , (ii) si verifica facilmente per  $T_1 = T - A, T_2 = T - A'$ . ■

**NB:** vale ovviamente  $v \in T_1 \Rightarrow w \notin T_2, v \in T_2 \Rightarrow w \notin T_1$ .

Una caratteristica ulteriore delle derivazioni in  $MLL_0$  in quanto grafi è il fatto di essere *etichettati*, ossia di essere accompagnati da una corrispondenza tra i nodi del grafo e, in questo caso, le formule del linguaggio del sistema formale in questione. Si pone dunque:

**Definizione** (i) Dato un grafo  $G := (V_G, E_G)$ , una *etichettatura* per  $G$  è una funzione totale  $\lambda : V_G \rightarrow \mathbf{E}$ , dove  $\mathbf{E}$  è l'insieme delle etichette.

(ii) Un grafo etichettato  $Et(G) = (G, \lambda)$  è una coppia costituita da un grafo  $G$  e da un'etichettatura  $\lambda$  per  $G$ .

Nel seguito adottiamo le seguenti *convenzioni* sulle notazioni:

- ★ pur operando esclusivamente con grafi etichettati  $v = (G, \lambda)$  con  $\lambda : V_G \rightarrow FORM_{MLL_0} \cup \{\text{cut}\}$ , si indicheranno i nodi riferendosi alle rispettive etichette;
- ★ si scrive “ $A$  è in  $v$ ” ( $v = (G, \lambda)$ ) per “ $c$  è un  $v \in V_G$  e  $\lambda(v) = A$ . Si scrive invece “ $\{A, B\} \in v$ ”, per “esistono  $v, v' \in V_G$ ,  $\lambda(v) = A, \lambda(v') = B$  e  $\{v, v'\} \in E_G$ ”.

### 3 Reti di prova e derivazioni in $MLL_0$

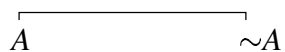
**Definizione** Una *struttura di prova* (sdp)  $\nu$  è un grafo con insieme  $TN(\nu)$  di *formule terminali* definiti (simultaneamente) come segue per ogni  $A, B$  formule:

1.  $\{A, \sim A\}$  è sdp con  $TN(\nu) = A, \sim A$ ;
2. se  $\nu$  è sdp e  $A, \sim A \in TN(\nu)$ , allora  $\nu' := \nu \cup \{\{A, \text{cut}\}, \{\text{cut}, \sim A\}\}$  è sdp con  $TN(\nu') = TN(\nu) \setminus \{A, \sim A\} \cup \{\text{cut}\}$ ;
3. se  $\nu$  è sdp e  $A, B \in TN(\nu)$ , allora  $\nu' := \nu \cup \{\{A, A \otimes B\}, \{A \otimes B, B\}\}$  è sdp con  $TN(\nu') = (TN(\nu) \setminus \{A, B\}) \cup \{A \otimes B\}$ ;
4. se  $\nu$  è sdp e  $A, B \in TN(\nu)$ , allora  $\nu' := \nu \cup \{\{A, A \wp B\}, \{A \wp B, B\}\}$  è sdp con  $TN(\nu') = (TN(\nu) \setminus \{A, B\}) \cup \{A \wp B\}$ ;
5. se  $\nu, \mu$  sono sdp, allora  $\nu' = \nu \cup \mu$  è sdp e  $TN(\nu') = TN(\nu) \cup TN(\mu)$ .

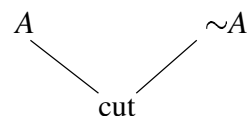
**NB:** nel seguito scriveremo  $A \prec B$  se  $B \equiv \sim A$ ,  $B \equiv A \otimes C$  o  $B \equiv A \wp C$  per  $C$  formula.

Graficamente, le strutture di prova possono essere viste come generate da quattro tipi di legame:

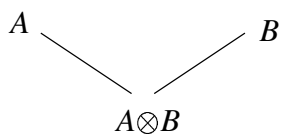
**Assioma**



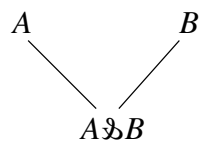
**Cesura**



**Tensore**



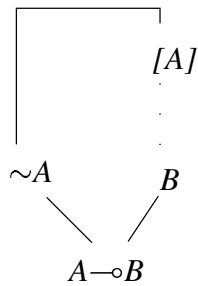
**Par**





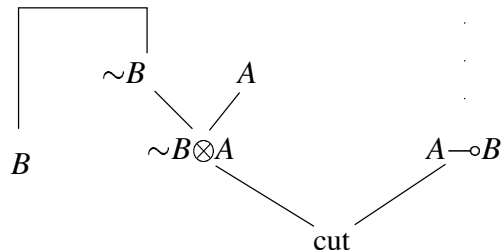
È quanto emerge da una traduzione degli esempi utilizzati in precedenza (si ricordi che  $A \multimap B := \sim A \wp B$ ):

$\mathbf{I}\multimap$  in questo caso si ottiene:

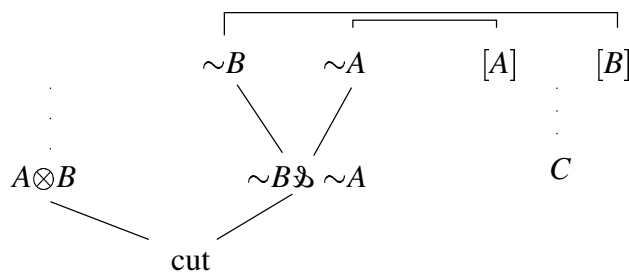


(si noti che si fa uso del fatto che l'implicazione è lineare: solo un'occorrenza di  $A$  viene scaricata nella derivazione di  $B$ ).

$E_{\rightarrow}$  si utilizza la cesura per ottenere:



$E_{\otimes}$  la traduzione permette di eliminare ogni legame (diretto) tra  $A \otimes B$  e la formula ausiliaria  $C$  (anche grazie alla caratteristica delle sdp di ammettere più di una conclusione):

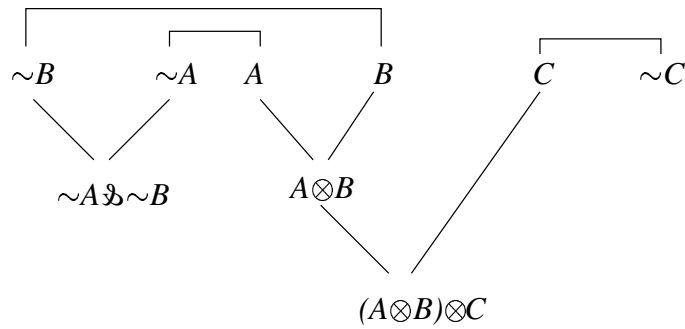


Tuttavia, è anche possibile associare strutture di prove a derivazioni in in  $MLL_0$ , e passare da una derivazione alla sdp ad essa corrispondente sembra risolvere il problema dell'esistenza di più derivazioni in  $MLL_0$  della stessa sequenza.

Se consideriamo ad esempio le due derivazioni equivalenti:

$$\frac{\frac{\frac{\overline{A, \sim A} \quad \overline{B, \sim B}}{A \otimes B, \sim A, \sim B}^{(\otimes)} \quad \overline{C, \sim C}}{(A \otimes B) \otimes C, \sim A, \sim B, \sim C}^{(\otimes)}}{(A \otimes B) \otimes C, \sim A \wp \sim B, \sim C}^{(\wp)} \quad \frac{\frac{\frac{\overline{A, \sim A} \quad \overline{B, \sim B}}{A \otimes B, \sim A, \sim B}^{(\otimes)} \quad \overline{C, \sim C}}{(A \otimes B), \sim A \wp \sim B}^{(\wp)} \quad \overline{C, \sim C}}{(A \otimes B) \otimes C, \sim A \wp \sim B, \sim C}^{(\otimes)}}$$

risulta che ad esse corrisponde un'unica struttura di prova (planare) che ne elimina le ridondanze:



**Problema** Come chiarire il rapporto tra grafi e derivazioni nel calcolo MLL<sub>0</sub>? Ovvero: È possibile determinare un criterio sulla base del quale identificare, tra le strutture di prova, tutte e sole quelle corrispondenti (in un senso preciso del termine) a derivazioni in MLL<sub>0</sub>?

La soluzione che presentiamo deriva da una semplificazione ad opera di V. Danos e L. Reigner di un'originaria proposta da Girard.

**Definizione** (i) Se  $v$  è sdp e, per qualche formula  $A, B$ ,  $\{\{A, A\&B\}, \{A\&B, B\}\} \in v$ , si definiscono *interruttori* di  $v$  i grafi  $\iota(v)_1^{A,B} := v \setminus \{A, A\&B\}$ ,  $\iota(v)_2^{A,B} := v \setminus \{A\&B, B\}$ .

(ii) Data una sdp  $v$  sia  $I = \iota(v)_{i_1}^{A_1, B_1}, \dots, \iota(v)_{i_n}^{A_n, B_n}$  una lista di interruttori per ogni  $\{\{A_j, A_j\&B_j\}, \{A_j\&B_j, B_j\}\} \in v$  e  $i_j \in \{1, 2\}$  ( $1 \leq j \leq n$ ). Una *variante* di  $v$  è il grafo:

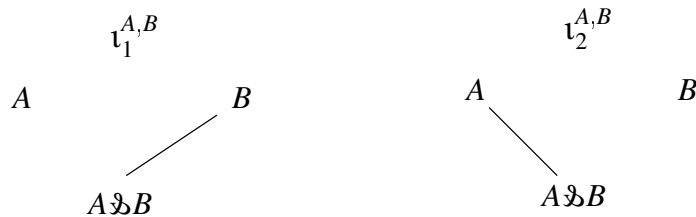
$$v_I := \bigcup_{1 \leq j \leq n} \iota(v)_{i_j}^{A_j, B_j}$$

(ossia, il grafo risultante da una scelta di interruttori per ogni legame “di tipo *par*” in  $v$ ).

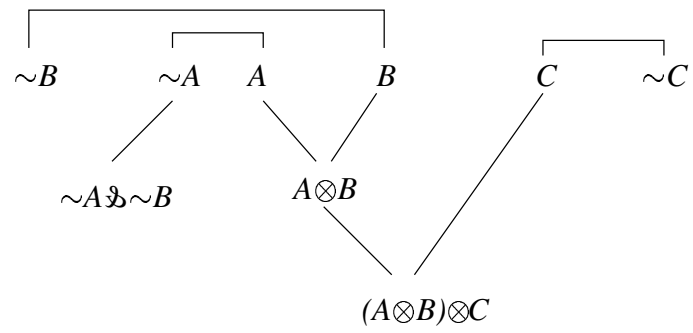
(iii) una sdp  $v$  è una *rete di prova* sse per ogni lista di interruttori  $I$  di  $v$ ,  $v_I$  è un albero (ossia un grafo connesso e aciclico).

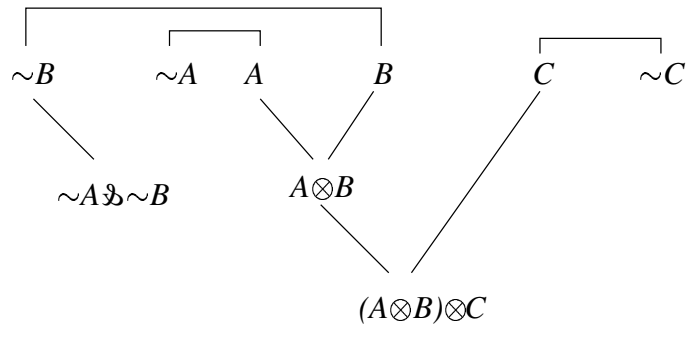
**NB:** se  $v = (G, \lambda)$  per  $G$  grafo,  $\lambda$  etichettatura per  $G$ ,  $\iota(v)_i^{A,B} = (G', \lambda)$  con  $G' = (V_G, E_G \setminus \{v, w\})$  con  $v, w \in V_G$  t.c.  $\lambda(v) = A$ ,  $\lambda(w) = B$ .

**NBB:** localmente  $\iota(v)_1^{A,B}$  e  $\iota(v)_2^{A,B}$  corrispondono alle seguenti configurazioni:



Globalmente invece, ossia all'interno di una rete, gli interruttori danno origine alle sue varianti come nel caso seguente:





Data una sdp  $v$  e  $A, B, C$  in  $v$ , scriviamo  $C \sqsubseteq \overline{AB}$  per  $C \in \bigcup \overline{AB}$  (cioè per, intuitivamente, “il percorso che connette  $A$  a  $B$  passa per  $C$ ”).

**Definizione** (i) Sia  $v$  una rete,  $A$  una formula in  $v$ ,  $v_I$  una variante. Il grafo  $v_I \setminus \{A, A'\}$  non è connesso, dunque esistono per la proposizione 2 precedente due grafi connessi ed aciclici  $v_I^1, v_I^2$  t.c.  $v_I \setminus \{A, A'\} = v_I^1 \cup v_I^2$ . Segue che  $A \in V_{v_I^1}$  oppure  $A \in V_{v_I^2}$  ma non entrambi. Sia dunque  $v_I(A) = v_I^i, i = 1, 2$  t.c.  $A \in V_{v_I^i}$ .

(ii) Data  $v$  rete e  $A$  in  $v$ , l'*impero* di  $A$  è definito da:

$$e(A) = \bigcap_I v_I(A)$$

**NB:** si può pensare a  $v_I(A)$  come al grafo ottenuto come segue: se  $A$  è la premessa di un legame con conclusione  $A'$  allora  $v_I(A)$  è la parte di  $v'$  che contiene  $A$  dove  $v' = v \setminus \{A, A'\}$ , altrimenti  $v' = v = v_I(A)$  (in particolare: se  $B$  è in  $v_I, \overline{AB} \in \mathcal{P}_{v_I}$  e  $A' \not\sqsubseteq \overline{AB}$  allora  $B \in v_I(A)$  - vedi (ii) sotto).

**NBB:** Se  $A$  è premessa di un legame con conclusione  $A'$ ,  $v_I(A)$  e  $v_I(A')$  sono grafi t.c.:

(i)  $v_I(A) \cap v_I(A') = \emptyset$ ;

(ii)  $v_I(A), v_I(A')$  sono alberi t.c.  $B \in v_I(A) (v_I(A')), \overline{BC} \in \mathcal{P}_{v_I, A'} (A) \not\sqsubseteq \overline{BC} \Rightarrow C \in v_I(A) (v_I(A'))$ ;

(iii)  $v_I(A) \cup v_I(A') = v_I \setminus \{A, A'\}$ .

*Dim.* (i) se esistesse  $B \in v_I(A) \cap v_I(A')$ ,  $v_I$  non sarebbe un albero perché  $\overline{AC}, \overline{A'C}, \{A, A'\}$  permetterebbero di costruire un ciclo.

(ii) connessione e aciclicità di  $v_I(A), v_I(A')$  seguono per definizione. La loro proprietà ulteriore segue in modo immediato dalle definizioni e dalla prop. 2.

(iii)  $v_I(A) \cup v_I(A') \subseteq v_I \setminus \{A, A'\}$  vale banalmente. Viceversa,  $B \in v_I \setminus \{A, A'\} \Rightarrow C \in v_I(A) \vee C \in v_{A'}$  segue per connessione di  $v_I$ . ■

Ai fini dei ragionamenti seguenti si può operare modulo la seguente *semplificazione* delle nostre definizioni: si può immaginare di sostituire ogni legame cesura  $\{A, \text{cut}\}, \{\text{cut}, \sim A\} \in \mathfrak{v}$  con un'istanza del legame tensore come  $\{A, A \otimes \sim A\}, \{A \otimes \sim A, \sim A\} \in \mathfrak{v}$ .

Vale allora:

**Lemma 1** Sia  $\mathfrak{v}$  rete e  $A$  in  $\mathfrak{v}$ . Valgono:

- (i) se  $\{B, \sim B\} \in \mathfrak{v}, B \in e(A)$  sse  $\sim B \in e(A)$ ;
- (ii) se  $\{B, B \otimes C\}, \{B \otimes C, C\} \in \mathfrak{v}$  e  $B, C \not\equiv A$  allora  $B \in e(A)$  sse  $B \otimes C \in e(A)$  sse  $C \in e(A)$ .
- (iii)  $\{B, B \wp C\}, \{B \wp C, C\} \in \mathfrak{v}$  e  $B, C \not\equiv A$  allora  $B \wp C \in e(A)$  sse  $B \in e(A)$  e  $C \in e(A)$ .
- (iv) se  $\{A, A \otimes A'\} \in \mathfrak{v}$  o  $\{A, A \wp A'\} \in \mathfrak{v}$  allora  $A \otimes A' (A \wp A') \notin e(A)$ .

*Dim.* (i), (ii), (iv) valgono in modo ovvio dalle definizioni (per ogni lista di interruttori  $I$ , le formule dell'enunciato risultano comunque legate tra loro e dunque raggiungibili da  $A$ ).

(iv) Vale ovviamente:

$$B \in e(A), C \in e(A) \Rightarrow \forall I. \overline{AB}, \overline{AC} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I}$$

da cui segue, valendo  $\overline{B}, \overline{B \wp C} \notin \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I} \Leftrightarrow \overline{C}, \overline{B \wp C} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I}, \overline{A}, \overline{B \wp C} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I}$  per ogni  $I$  che implica  $B \wp C \in e(A)$ .

Viceversa, *supp.*  $B \wp C \in e(A)$  e, ad es.,  $C \notin e(A)$ . Ergo, per qualche scelta di interruttori  $I$ ,  $\overline{AC} \notin \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I}$  ovvero  $C \notin \mathfrak{v}_I(A)$ . Poiché  $\mathfrak{v}_I$  è connesso deve essere  $\mathfrak{v}_I(A) \neq \mathfrak{v}_I$ , dunque c'è un  $A'$  t.c.  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in \mathfrak{v}_I$  (poiché  $\mathfrak{v}_I$  è connesso,  $\overline{AC} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_I}$  ed essendo  $\mathfrak{v}_I$  albero, tale percorso è unico; quindi deve esistere un tale  $A'$  con  $A' \sqsubseteq \overline{AC}$ ).

Poiché  $B \wp C \in e(A)$  non può essere  $\{C, B \wp C\} \in \mathfrak{v}_I$  (ossia  $\mathfrak{v}^{B,C}_2 \in I$ ), da cui  $\{B, B \wp C\} \in \mathfrak{v}_I$ . Sia allora  $I^* = I[\mathfrak{v}^{B,C}_1 \in I := \mathfrak{v}^{B,C}_2 \in I]$ . Poiché  $B \wp C \in e(A)$  vale ancora  $\overline{A}, \overline{B \wp C} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_{I^*}}$ , con in più stavolta che  $\overline{AC} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_{I^*}}$ . Poiché nient'altro è cambiato passando da  $I$  in  $I^*$ , vale sempre  $\overline{CA'} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_{I^*}}$  da cui  $\overline{A' B \wp C} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{v}_{I^*}}$ . Si avrebbe perciò ( $\{A, A'\} \in \mathfrak{v}_{I^*}$ ) che, contrariamente alle ipotesi,  $\mathfrak{v}_{I^*}$  conterrebbe un ciclo. Dunque  $B \wp C \in e(A) \Rightarrow B \in e(A), C \in e(A)$ . ■

**NB:** i percorsi  $\overline{AC}, \overline{CA'}$  sono distinti per quanto dimostrato in precedenza per ogni  $\mathfrak{v}_I(A)$  e il suo complemento.

Occorre tenere presente quanto stabilisce il lemma precedente. Partendo da un'occorrenza  $A$  in  $\mathbf{v}$ , si è sicuri di procedere *dentro*  $e(A)$  fin tanto che non si incontra un legame  $\{C_1, C_1 \& C_2\}, \{C_1 \& C_2, C_2\}$ , rispetto al quale si danno *due possibilità*:

- ★ se si incontra la conclusione  $C_1 \& C_2$  si è sicuri che  $C_i \in e(A)$  vale per  $i = 1, 2$ ;
- ★ se si incontra una delle due premesse  $C_i$  si sa che  $C_1 \& C_2 \notin e(A)$  (poiché esiste una lista di interruttori  $I$  t.c.  $\{C_i, C_1 \& C_2\} \notin \mathbf{v}_I(A)$  - **NB**: i percorsi sono unici nelle  $\mathbf{v}_I$  per ogni lista  $I$ ), e quindi si è sicuri, per il lemma precedente, che  $C_j \notin e(A)$ .

Ciò significa che la *frontiera* dell'impero di una occorrenza  $A$ , cioè la collezione delle formule più prossime al termine di  $e(A)$ , ovvero, formalmente, l'insieme:

$$F(e(A)) := (TN(\mathbf{v}) \cap e(A)) \cup \{C \in e(A) \mid B \notin e(A) \Rightarrow (\exists I. \overline{BC} \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}_I} \wedge \wedge (D \in e(A) \wedge \exists I. \overline{DC} \in \mathcal{P}_{\mathbf{v}_I} \Rightarrow \overline{BC} \subseteq \overline{DC}))\}$$

può essere costituita solo da tre tipi di formule:

- ★ occorrenze  $B \in TN(\mathbf{v})$ ;
- ★ premesse  $C_i$  di inferenze  $\{C_1, C_1 \& C_2\}, \{C_1 \& C_2, C_2\}$ , la cui conclusione e l'altra premessa non sono in  $e(A)$ ;
- ★  $A$  stessa.

Posto:

**Definizione** Data  $v$  rete e  $A$  in  $v$ , una lista  $I$  di interruttori di  $v$  è detta *principale per  $A$*  se e solo se  $v_I(A) = e(A)$ .

Si dimostra che vale:

**Lemma 2** Per ogni rete  $v$  e per ogni occorrenza di una formula  $A$  in  $v$  esiste (almeno) una lista principale per essa.

*Dim.* Se  $A \in TN(v)$  vale  $v_I(A) = v_I = e(A)$  per ogni lista di interruttori  $I$ .

Supponiamo allora che  $A$  sia la premessa di un legame con conclusione  $A'$ . Si definisce una lista di interruttori  $I$  principale per  $A$  come segue:

- (i) se  $A' \equiv A \& A''$  (risp.  $A' \equiv A'' \& A$ ) allora  $\iota(v)_1^{A,A''} \in I$  ( $\iota(v)_2^{A,A''} \in I$ ), cioè  $\{A, A'\} \in v_I$ ;
- (ii) per ogni  $C_1, C_2 \not\equiv A$  con  $\{C_1, C_1 \& C_2\}, \{C_1 \& C_2, C_2\} \in v$  e  $C_1 \& C_2 \notin e(A)$ , dovendo essere  $C_i \notin e(A)$  per  $i = 1$  o  $i = 2$ , si ponga  $\{C_i, C_1 \& C_2\} \in v_I$ .

Dalla definizione di impero e dal lemma 1 segue che se  $B \notin e(A)$  allora, se  $B \not\equiv A'$  t.c.  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in v$ , esiste una lista  $I^*$  di interruttori t.c.  $B \notin v_{I^*}(A)$ , ossia, per qualche occorrenza  $C, C'$  in  $v$ ,  $\overline{BC \& C'} \sqsubseteq \overline{AB}$ ,  $C \& C' \notin e(A)$  e, ad es.,  $C \notin e(A)$ ,  $C' \in e(A)$  (da cui, poichè  $\overline{CC'} \in \mathcal{P}_{v_I} - v_I$  è un albero - deve essere  $A' \sqsubseteq \overline{CC'}$ ).

Ma in tal caso vale  $\{C, C \& C'\} \in v_I$  per costruzione di  $I$  e, valendo ancora  $\overline{BC \& C'} \in \mathcal{P}_{v_I}$ , sicuramente non può essere  $\overline{AB} \in \mathcal{P}_{v_I}$  (se anche  $C' \in v_I(A)$ ,  $\{C', C \& C'\} \notin v_I$  e  $\overline{CC'} \notin \mathcal{P}_{v_I}$ ).

Quanto detto vale in modo immediato per  $B \equiv A' \equiv A \& A''$  (risp.  $A' \equiv A'' \& A$ ) per definizione di  $I$ , e, per definizione di  $v_I(A)$  per  $I$  lista di interruttori, per  $B \equiv A'$  con  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in v$ .

Ergo,  $B \notin v_I(A)$  da cui, per contrapposizione,  $v_I(A) \subseteq e(A)$ . ■

**NB:** la lista principale utilizzata nella dimostrazione non è unica: per ogni  $C_1, C_2 \not\equiv A$  t.c.  $C_1 \& C_2 \in e(A)$  si è liberi di scegliere un interruttore qualsiasi.

**Lemma 3** Sia  $v$  rete,  $A, B$  occorrenze distinte in  $v$  con  $B \notin e(A)$ . Allora:

(i)  $A \in e(B) \Rightarrow e(A) \subseteq e(B)$

(ii)  $A \notin e(B) \Rightarrow e(A) \cap e(B) = \emptyset$

*Dim.* Sia  $I$  una lista principale per  $B$  che soddisfi inoltre:

1. per ogni  $C \equiv C_1 \& C_2$  in  $v$  con  $C_1 \& C_2 \notin e(A)$ , sia  $\{C_i, C_1 \& C_2\} \in v_I$  per  $C_i \notin e(A)$ .
2. se  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in v$  per  $A' \in e(B)$  sia  $\{A, A'\} \in v_I$ .

Vale, per ogni  $C \in v_I(A), C \neq A$ :

$$C \in e(A) \cap e(B) \wedge \{C, C'\} \in v_I \Rightarrow C' \in e(A) \cap e(B)$$

Infatti, se  $C \in e(A)$  segue  $C \in v_I(A)$ . Se per  $C'$  t.c.  $\{C, C'\} \in v_I$  si avesse  $C' \notin e(A)$  si avrebbe  $C' \notin v_{I^*}(A)$  per qualche lista di interruttori  $I^*$  di  $v$ . Ma in tal caso si avrebbe anche per costruzione di  $I$  e argomento del lemma 2,  $C' \notin v_I(A)$  (il che è escluso da  $C \in v_I(A)$  e  $\{C, C'\} \in v_I$ ). Da  $C \in v_I(B)$  e  $\{C, C'\} \in v_I$  vale poi banalmente  $C' \in v_I(B) = e(B)$ .

Quanto detto non vale invece per  $C \equiv A$  e  $C' \equiv A'$ , se  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in v$ , per definizione di  $e(A)$  (nel quale caso si ha  $C \in e(A) \cap e(B) \Rightarrow C' \in e(A) \cap e(B)$ ).

Supp. allora  $A \in e(B)$ , da cui segue immediatamente  $A \in e(A) \cap e(B)$ . Poichè vale  $B \in e(B)$  ma  $B \notin e(A)$  per ipotesi, deve essere  $A' \sqsubseteq \overline{AB} \in \mathcal{P}_{v_I}$  per  $A \prec A'$  e  $\{A, A'\} \in v$ . Ma allora  $v_I(A) \subseteq v_I(B)$  vale in modo ovvio, da cui (i) segue per:

$$e(A) \subseteq v_I(A) \subseteq v_I(B) = e(B)$$

Se invece  $A \notin e(B) = v_I(B)$  allora se  $\{A, A'\} \in v_I$ , segue necessariamente  $A' \notin e(B)$  da cui  $C \in e(A)$  sse  $C \notin e(B)$  che implica (ii). ■

**Definizione** Un'occorrenza  $A$  in  $v$  con  $A \in TN(v)$  è *tranciante* se  $v - \{A\} = v_1 \cup v_2$  con  $\{A_1, A_2\} \in v_1$  sse  $\{A_1, A_2\} \in v_2$  (ovvero,  $A$  è tranciante se il grafo che si ottiene eliminandola assieme a tutti i legami incidenti ad essa dà origine a due grafi disgiunti).

Vale:

**Lemma 4** Se  $v$  è una rete tale che, per ogni  $C \in TN(v)$ ,  $C \equiv C_1 \otimes C_2$  per  $C_1, C_2$  formule, allora una tra le  $C \in TN(v)$  è tranciante.

*Dim.* Siano  $A_i \otimes B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) i nodi terminali di  $v$ . Tra i  $E = \{e(C) \mid C \equiv A_i \vee C \equiv B_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  deve esistere un impero massimale rispetto all'inclusione (ossia un  $e(C) \in E$  t.c. per ogni altro  $e(C') \in E$ , se  $e(C) \cap e(C') \neq \emptyset$  allora  $e(C') \subseteq e(C)$ ).

Vale infatti che per ogni  $e(C) \in E$  esiste almeno un  $e(C') \in E$  t.c.  $e(C) \cap e(C') \neq \emptyset$  (ossia non tutte le intersezioni tra elementi di  $E$  possono essere vuote).

Supp. infatti che, per  $1 \leq i, j \leq n$ , sia  $C \equiv A_i, C' \equiv B_j$  con  $e(A_i) \cap e(B_j) = \emptyset$ . Segue in particolare  $A_i \notin e(B_j) = v_I(B_j)$ , per  $I$  principale per  $B_j$ . Se fosse  $B_j \notin e(B_j)$ , si avrebbe anche  $A_i \otimes B_j \notin v_I(B_j)$  da cui, poiché necessariamente  $A_i \sqsubseteq B_j(A_i \otimes B_j) \in \mathcal{P}_{v_I}$  o  $B_j \sqsubseteq B_j(A_i \otimes B_j) \in \mathcal{P}_{v_I}$ , si avrebbe che  $v_I$  non è connesso. Dunque,  $B_j \in e(B_j)$  da cui, valendo ovviamente  $B_j \in e(B_j)$ ,  $e(B_j) \cap e(B_j) \neq \emptyset$ .

Ma se per ogni  $e(C) \in E$  esiste almeno un  $e(C') \in E$  t.c.  $e(C) \cap e(C') \neq \emptyset$ , segue dal lemma 2 che vale  $C \in e(C') \wedge e(C) \subseteq e(C')$  oppure  $C' \in e(C) \wedge e(C') \subseteq e(C)$ .

Supponiamo allora che  $e(A_i)$  sia tale elemento massimale di  $E$ . Allora, la frontiera di  $e(A_i)$  è costituita solo da  $A_i$  stessa oppure occorrenze  $A_j \otimes B_j \in TN(v)$ .

Supp. infatti che ci sia  $C \in e(A_i)$  con  $C \neq A_i, C \notin TN(v)$ . Allora, per quanto stabilito in precedenza, esiste  $C'$  t.c.  $C \& C'$  occorre in  $v$  ma  $C \& C' \notin e(A_i)$  (dunque  $C' \notin e(A_i)$ ). Essendo  $C \& C' \notin TN(v)$  per ipotesi, esistono  $A_j, B_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) t.c., per ogni lista di interruttori  $I$ ,  $\overline{(C \& C')(A_j \otimes B_j)} \in \mathcal{P}_{v_I}$ . Segue che  $\overline{CA_j}, \overline{C'A_j} \in \mathcal{P}_{v_I}$  oppure  $\overline{CB_j}, \overline{C'B_j} \in \mathcal{P}_{v_I}$  (non può darsi un caso intermedio, ad es.  $\overline{CA_j}, \overline{C'B_j} \in \mathcal{P}_{v_I}$  con  $A_j \not\sqsubseteq \overline{C'B_j}, B_j \not\sqsubseteq \overline{CA_j}$  perché altrimenti  $\overline{C(A_j \otimes B_j)}, \overline{C'(A_j \otimes B_j)}$  permetterebbero di costruire un ciclo in  $v_I$ ). Supponiamo valga il primo caso: è chiaro che  $A_j \notin e(A_i)$ , altrimenti si avrebbe  $\overline{A_j C'} \in \mathcal{P}_{v_I}$  per ogni  $I$  ovvero  $C' \in e(A_i)$  da cui, per il lemma 1,  $C \& C' \in e(A_i)$ . Ma  $C \in e(A_i) \cap e(A_j) \neq \emptyset$  da cui, per il lemma 3

(ii),  $A_i \subseteq A_j$  e (lemma 3 (i))  $e(A_i) \subseteq e(A_j)$  che contraddice l'ipotesi di massimalità di  $e(A_i)$ .

Se la frontiera di  $e(A_i)$  è costituita allora solo da nodi terminali di  $v$  e da  $A_i$  stessa, si ricava che ogni lista di interruttori  $I$  di  $v$  è principale per  $A_i$ , ovvero che, per ogni  $I$ ,  $v_I(A_i) = e(A_i)$ .

Fissata una  $I$  qualsiasi, sia infatti  $C \in v_I(A_i)$ . Se  $C \notin e(A_i)$ , segue che  $C \not\equiv A_i$  e, per il lemma 1, che esistono  $C', C''$  in  $v$  t.c.  $C' \equiv \sim C \notin e(A_i)$ ,  $C' \notin e(A_i)$ ,  $C'' \notin e(A_i)$ ,  $C \equiv C' \otimes C''$ ,  $C' \notin e(A_i)$ ,  $C'' \equiv C \otimes C' \notin e(A_i)$ ,  $C \equiv C' \& C''$ ,  $C'(C'') \notin e(A_i)$  oppure  $C' \in e(A_i)$ ,  $C'' \equiv C \& C' \notin e(A_i)$ . In tutti questi casi è possibile trovare una occorrenza  $B \in e(A_i)$  di frontiera ed un'occorrenza  $B' \in TN(v)$  per le quali ripetere l'argomento precedente, arrivando a contraddire la massimalità di  $e(A_i)$ .

Da  $v_I(A_i) = e(A_i)$  per ogni lista di interruttori  $I$  segue  $v_I(B_i) = e(B_i)$  per ogni lista di interruttori  $I$ .

Infatti  $C \notin e(B_i)$  implica  $C \notin v_{I'}(B_i)$  per qualche lista di interruttori  $I'$ . Se fosse  $C \notin v_{I'}(A_i) = e(A_i)$  si avrebbe che, contrariamente alle ipotesi ( $v$  è una rete),  $v_{I'}$  non risulterebbe essere connesso. Dunque  $C \in e(A_i)$ . Ciò esclude che, per qualche  $I''$  ulteriore si possa avere  $C \in v_{I''}(B_i)$  (poiché  $e(A_i) = v_{I''}(A_i)$  e per ogni  $I$   $v_I(A_i) \cap v_I(B_i)$ , pena circolarità di  $v_I$ ). Se quindi fissata una qualunque  $I$  si ha che  $C \notin e(B_i) \Rightarrow C \notin v_I(B_i)$ , segue  $v_I(B_i) \subseteq e(B_i)$  per contrapposizione.

Si mostra infine che  $v_1 = v_I(A_i)$ ,  $v_2 = v_I(B_i)$  per  $I$  lista di interruttori di  $v$  sono i grafi cercati.

Da  $v_I(A_i) = e(A_i)$ ,  $v_I(B_i) = e(B_i)$  segue immediatamente  $v_I(A_i) \cap v_I(B_i) = e(A_i) \cap e(B_i) = \emptyset$ . Ciò significa che  $A_i$  e  $B_i$  possono essere connessi tra loro e con ogni altra  $C$  nell'impero della "compagna" solo tramite  $A_i \otimes B_i \in TN(v)$ . Ciò permette di stabilire quindi  $v_1 \cup v_2 = v - (A_i \otimes B_i)$ , da cui il lemma. ■

Finalmente, posto  $MLL_0^- = MLL_0 - (\text{cut})$ , si giunge per questa via al seguente:

**Teorema**  $MLL_0^- \vdash \Gamma$  sse esiste  $v$  rete con  $TN(v) = \Gamma$ .

*Dim.*  $\Rightarrow$  Per induzione sulla lunghezza della derivazione di  $\Gamma$  in  $MLL_0^-$ .

**base**  $\Gamma \equiv A, \sim A$ . La tesi discende immediatamente per  $v = \{A, \sim A\}$ .

**passo**

caso 1.

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\Gamma', A \quad \Gamma'', B}{\Gamma', \Gamma'', A \otimes B}$$

Per IH esistono  $v', v''$  reti t.c.  $TN(v') = \Gamma', A$ ,  $TN(v'') = \Gamma'', B$ . Ma  $v^* = v \cup v' \cup \{\{A, A \otimes B\}, \{B, A \otimes B\}\}$  è ovviamente ancora una rete (ogni nodo in  $v'$  è connesso ad ogni nodo in  $v''$  “tramite”  $A \otimes B$ , e nessun ciclo che non fosse preesistente può essersi costruito per questa via), e  $TN(v^*) = \Gamma', \Gamma'', A \otimes B$ .

caso 2.

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\Gamma', A, B}{\Gamma', A \wp B}$$

Per IH esiste  $v'$  rete t.c.  $TN(v') = \Gamma', A, B$ . Sia  $v^* = v' \cup \{\{A, A \wp B\}, \{B, A \wp B\}\}$ . Poiché  $v'$  è una rete, per ogni lista di interruttori  $I$ ,  $v'_I$  è connesso (visto che  $\overline{AB} \in v'_I \subseteq v_I^*$  e  $\{A, A \wp B\} \in v_I^*$  oppure  $\{B, A \wp B\} \in v_I^*$ ). Per lo stesso motivo  $v_I^*$  è aciclico, poiché  $\{A, A \wp B\} \in v_I^*$  sse  $\{B, A \wp B\} \in v_I^*$ .

$\Leftarrow$  Per induzione sul numero  $n(v)$  di nodi di  $v$ .

**base**  $n(v) = 2$ . Segue  $v = \{A, \sim A\}$  per  $A$  formula e il teorema vale banalmente.

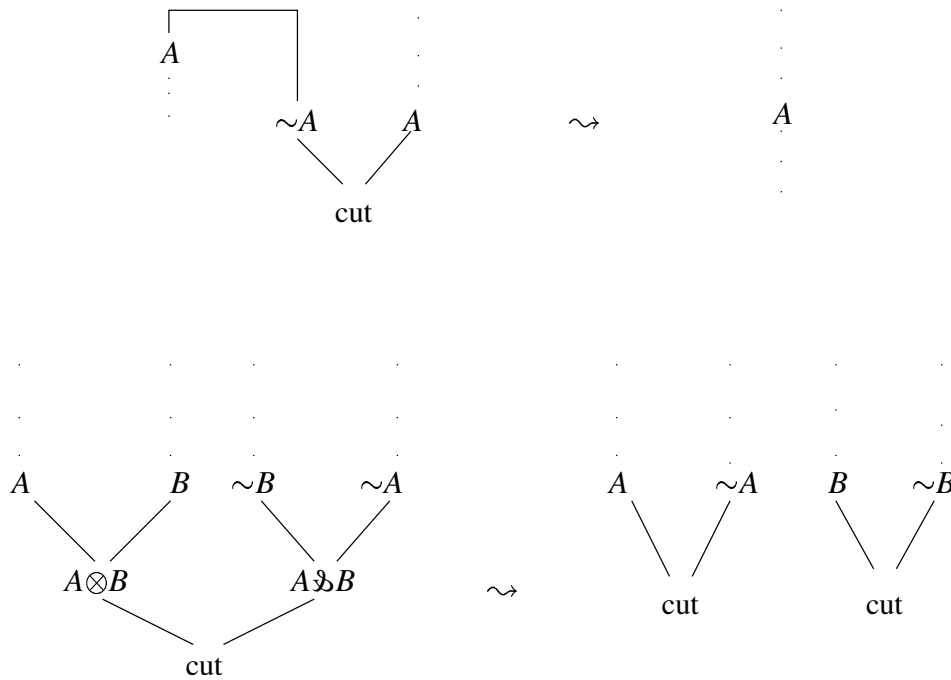
**passo**  $n(v) > 2$ . Si distinguono due casi:

**caso 1** Esiste  $C \in TN(v)$  t.c.  $C \equiv C_1 \wp C_2$  per  $C_1, C_2$  formule di  $MLL_0^-$ . Ma  $v' = v - \{C\}$  è chiaramente ancora una rete per motivi del tutto analoghi al caso 2 precedente, e  $n(v') < n(v)$ . Segue  $MLL_0^- \vdash \Gamma = TN(v') = (TN(v) \setminus \{C_1 \wp C_2\}) \cup \{C_1, C_2\}$ , da cui discende immediatamente  $MLL_0^- \vdash \Gamma' = TN(v)$ .

**caso 2** Supponiamo invece che per ogni  $C \in TN(\mathbf{v})$  ci siano occorrenze  $C_1, C_2$  t.c.  $C \equiv C_1 \otimes C_2$ . Sia allora  $C_i \otimes C_j$  la formula tranciante di  $\mathbf{v}$  che esiste per il lemma 4. Ma, posto  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \{C_i \otimes C_j\}$ , vale che  $\mathbf{v}'$  è ancora una rete (poiché  $\mathbf{v}$  è aciclico, vale  $C_i \otimes C_j \not\sqsubseteq \overline{C_i C_j}$ , ergo  $\overline{C_i C_j} \in \mathcal{P}^{\mathbf{v}'}$  per ogni  $I$ ). Vale dunque per IH, essendo  $n(\mathbf{v}') < n(\mathbf{v})$ ,  $MLL_0^- \vdash \Gamma = TN(\mathbf{v}') = (TN(\mathbf{v}) \setminus \{C_i \otimes C_j\}) \cup \{C_i, C_j\}$ . Ergo  $MLL_0^- \vdash \Gamma' = TN(\mathbf{v})$ . ■

## 4 Normalizzazione delle reti di prova

Come nel caso delle derivazioni in un normale calcolo di deduzione naturale, anche per le reti di prova è possibile definire una nozione di riduzione (in questo caso coincidente con l'eliminazione delle cesure), nel modo seguente:



Non è difficile verificare che la relazione così definita è confluyente (ovvero possiede la proprietà di Church Rosser), e che, definita una rete in forma normale se non possiede legami di tipo cesura, ogni successione di riduzioni applicata ad una rete termina in un grafo in forma normale.

## Riferimenti bibliografici

- [1] G. Longo A. Asperti. *Categories, Types and Structures. An introduction to Category Theory for the working computer scientist*. M.I.T. Press, 1991.
- [2] P. L. Curien. *Introduction to linear logic and ludics*. 2003.
- [3] J. Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–101, 1987.
- [4] J. Y. Girard. *Cours de logique, rome - automne 2004*. disponibile presso <http://logica.uniroma3.it/uif> (cap. 9 e segg., in part.), 2004.
- [5] P. J. Scott J. Lambek. *Introduction to higher order categorial logic*. Cambridge University Press, 1986.
- [6] J. Lambek. *Deductive Systems and Categories II*. Springer, 1969.
- [7] J. Lambek. *Deductive Systems and Categories III*. Springer, 1972.
- [8] J. Lambek. From lambda calculus to cartesian closed categories. In J. R. Hindley J. P. Seldin, editor, *To H. B. Curry: Essays on combinatorial logic, lambda-calculus and formalism*. Academic Press, 1980.
- [9] A. Masini S. Martini. A modal view of linear logic.
- [10] D. Scott. Data types as lattices. *SIAM Journal of Computing*, 5:522–587, 1976.
- [11] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. CSLI, Lecture Notes No. 29, 1992.
- [12] L. Reigner V. Danos. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, 28:181–203, 1989.
- [13] R. Di Cosmo V. Danos. *The Linear Logic Primer*. disp. presso <http://dmi.ens.fr/~dicosmo>, 2003.