

PARTE II
SPAZI COERENTI

0. Riepilogo: interpretazione BHK

All'origine dell'impiego della teoria delle categorie per fini logici, sta la possibilità di offrire una nuova elaborazione della cosiddetta *interpretazione Brouwer-Heyting-Kolmogorov* delle costanti logiche, la quale si contrappone a quella classica vero-funzionale individuando il significato dei connettivi nelle rispettive *condizioni di derivabilità* piuttosto che nelle *condizioni di verità*.

L'interpretazione si basa sulle clausole qui di seguito riportate:

Prop. atomiche: se A è una proposizione atomica allora θ è una dimostrazione di A se e solo se A è vera.

Congiunzione: θ è una prova di $A \wedge B$ se e solo se $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ con θ_0 prova di A , θ_1 dimostrazione di B .

Disgiunzione: θ è una dimostrazione di $A \vee B$ sse $\theta = (i, \theta_i)$ dove $i = 1$ e θ_1 è una prova di A , oppure $i = 2$ e θ_2 è una prova di B .

Implicazione: θ è una dimostrazione di $A \rightarrow B$ sse θ è una costruzione che associa ad ogni dimostrazione θ' di A una dimostrazione $\theta'' = \theta(\theta')$ di B .

Quant. universale: θ è una prova di $\forall xA$ sse θ è una costruzione che associa ad ogni individuo $i \in \mathcal{U}$ una prova $\theta' = \theta(i)$ di $A[x := i]$.

Quant. esistenziale: θ è una dimostrazione di $\exists xA$ sse $\theta = (i, \theta')$ dove $i \in \mathcal{U}$ e θ' è una prova di $A[x := i]$.

NB: si noti che tale definizione si basa su alcuni concetti (“prova”, “costruzione”) dichiaratamente ambigui.

1. Teoria delle categorie: nozioni elementarissime

Lo studio degli spazi coerenti, che rappresenta il vero “atto fondativo” della logica lineare, si situa nell’ambito dell’indagine logica che fa uso di nozioni e risultati appartenenti alla teoria delle categorie. Ciò spiega il contenuto del presente paragrafo introduttivo.

Definizione Una *categoria* $\mathcal{C} = (O^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ è data dalla classe $O^{\mathcal{C}}$ degli oggetti di \mathcal{C} , e dalla collezione $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ che contiene, per ogni $A, B \in O^{\mathcal{C}}$, i morfismi $\mathcal{M}(A, B)$, ossia trasformazioni univoche di elementi di A in elementi di B .

Utili nozioni ulteriori sono date dalla seguente:

Definizione (i) $dom, cod : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \longrightarrow O^{\mathcal{C}}$ e $dom(F) = A$ per $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, B)$ è il *dominio* o *sorgente* di F , $cod(F) = B$ è il *codominio* o *obiettivo* di F .

(ii) $i_- : O^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $i_A \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, A)$ per $A \in O^{\mathcal{C}}$ è l’*identità* su A con $dom(i_A) = A = cod(i_A)$.

(iii) $\circ : \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{M}^{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$, funzione definita se e solo se $F, G \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e $cod(F) = dom(G)$, con $dom(G \circ F) = dom(F)$, $cod(G \circ F) = cod(G)$.

Si assume inoltre che valgano, per $F, G, H \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} dom(F) = A &\Rightarrow F \circ i_A = F \\ cod(F) = B &\Rightarrow i_B \circ F = F \\ H \circ (G \circ F) &= (H \circ G) \circ F \end{aligned}$$

1.1 Alcuni problemi (universali) notevoli e loro soluzioni

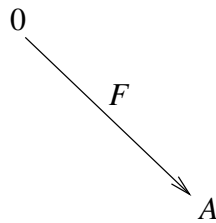
Tra le questioni rilevanti che si affrontano nello studio delle categorie vi sono le soluzioni, cosiddette universali, ad un certo numero di problemi notevoli, le quali passano attraverso la determinazione dei seguenti fatti:

- esistenza di un particolare oggetto (in quanto “costante”, o determinato da una funzione $o : (\mathcal{M}^C)^n \longrightarrow \mathcal{O}^C$) e relativi morfismi;
- generalità (minimalità/massimalità) della costruzione introdotta.

Questo tipo di soluzione si esemplifica bene attraverso una serie di esempi che risultano rilevanti nell'indagine sugli spazi coerenti. Ciò permette inoltre di apprezzare un elemento tipico dell'approccio della teoria delle categorie, ossia il ragionamento "per diagrammi":

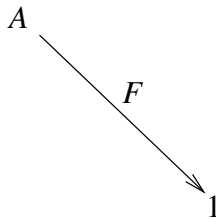
Elemento iniziale: Una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *elemento iniziale* se esiste un oggetto $0 \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ ed un unico morfismo $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(0, A)$ per ogni $A \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$.

Si tratta dell'oggetto che "risolve" il seguente diagramma:



Elemento terminale: Una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *elemento terminale* se esiste un oggetto $1 \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ ed un unico morfismo $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, 1)$ per ogni $A \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$.

L'oggetto risolve il diagramma duale del precedente:

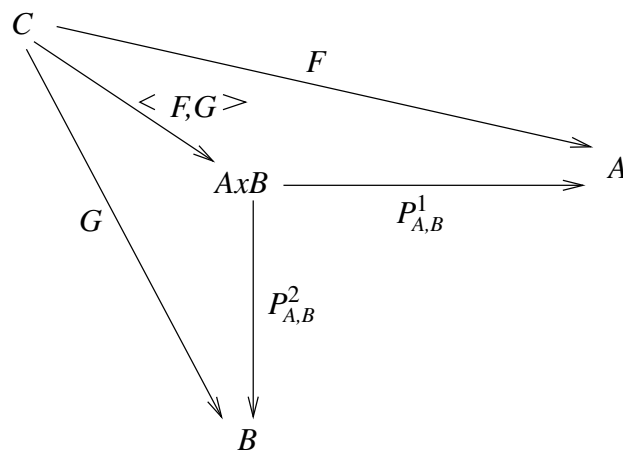


Prodotto finito: Una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *prodotto finito* se per ogni $A, B \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ esistono $A \times B \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ e $P_{A,B}^1 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A \times B, A)$, $P_{A,B}^2 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A \times B, B)$ tali che per ogni $C \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ e $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(C, A)$, $G \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(C, B)$ esiste un'unico $\langle F, G \rangle \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(C, A \times B)$ con:

$$P_{A,B}^1 \circ \langle F, G \rangle = F$$

$$P_{A,B}^2 \circ \langle F, G \rangle = G$$

Tutto ciò si esprime dicendo che il seguente diagramma *commuta*:

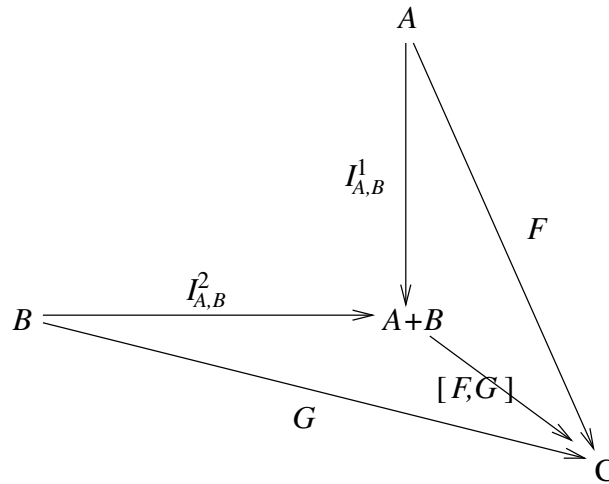


Coprodotto (finito): Una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *coprodotto* se per ogni $A, B \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ esistono $A+B \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ e $I_{A,B}^1 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, A+B)$, $I_{A,B}^2 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(B, A+B)$ tali che per ogni $C \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ e $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, C)$, $G \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(B, C)$ esiste un'unico $[F, G] \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A+B, C)$ con:

$$[F, G] \circ I_{A,B}^1 = F$$

$$[F, G] \circ I_{A,B}^2 = G$$

Tale costruzione corrisponde alla commutazione del seguente diagramma:



Applicazione: Una categoria $C = (\mathcal{O}^C, \mathcal{M}^C)$ ammette *applicazione* se per ogni $A, B \in \mathcal{O}^C$ esistono $B^A \in \mathcal{O}^C$ e $Ev \in \mathcal{M}^C(B^A \times A, B)$ tali che, per ogni $C \in \mathcal{O}^C$ e $F \in \mathcal{M}^C(C \times A, B)$ esiste un unico $L_F \in \mathcal{M}^C(C, B^A)$ tali che:

$$Ev \circ (L_F \times i_A) = F$$

dove, per $F \in \mathcal{M}^C(X, Y), G \in \mathcal{M}^C(Z, W), F \times G \in \mathcal{M}^C(X \times Z, Y \times W)$ e $F \times G = \langle F \circ P_X^1, Z, G \circ P_Y^2, W \rangle$.

Ovvero, una categoria ammette applicazione se il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 C \times A & \xrightarrow{L_F \times i_A} & B^A \times A \\
 & \searrow F & \swarrow Ev \\
 & & B
 \end{array}$$

NB: la soluzione del problema dell'applicazione in una categoria può essere vista come la base per l'asserzione che B^A rappresenta in C la collezione $\mathcal{M}^C(A, B)$.

Le nozioni fin qui introdotte ci permettono di giungere alla seguente definizione, che risulta essere storicamente cruciale per l'applicazione della teoria delle categorie alla logica:

Definizione Una categoria è *cartesiana chiusa* (CCC) se essa ammette elemento terminale, prodotto finito per ogni coppia di oggetti e applicazione.

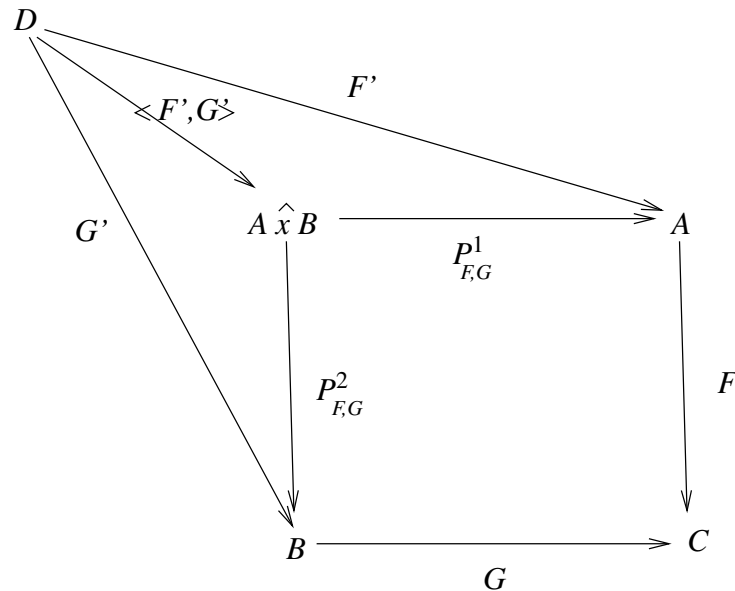
Due concetti ulteriori, utili alla comprensione delle specificità degli spazi coerenti sono le seguenti:

Pullbacks: Una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *pullback* se per ogni $A, B, C \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$, $F \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A, C)$, $G \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(B, C)$ esistono $A \hat{\times} B \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$ e $P_{F,G}^1 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A \hat{\times} B, A)$, $P_{F,G}^2 \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(A \hat{\times} B, B)$ tali che, per ogni $D \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$, $F' \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(D, A)$, $G' \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(D, B)$, valgono:

$$P_{F,G}^1 \circ \langle F', G' \rangle = F'$$

$$P_{F,G}^2 \circ \langle F', G' \rangle = G'$$

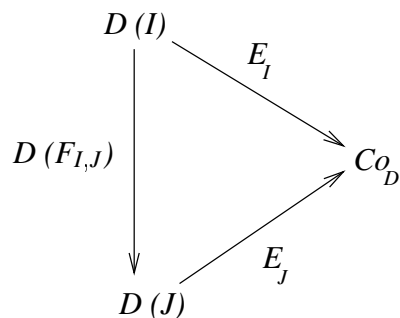
Ciò corrisponde alla commutazione del diagramma:



Colimiti: Supponiamo $I = (\mathcal{O}^I, \mathcal{M}^I)$, $\mathcal{D} = (\mathcal{O}^{\mathcal{D}}, \mathcal{M}^{\mathcal{D}})$ siano categorie e $D : I \rightarrow \mathcal{D}$ un funtore tale che $I \in \mathcal{O}^I \Rightarrow D(I) \in \mathcal{O}^{\mathcal{D}}$ e $F_{I,J} \in \mathcal{M}^I(I,J) \Rightarrow D(F_{I,J}) \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}(D(I), D(J))$.

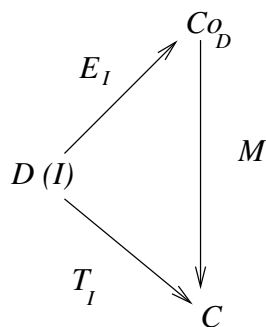
Allora, una categoria $\mathcal{C} = (\mathcal{O}^{\mathcal{C}}, \mathcal{M}^{\mathcal{C}})$ ammette *colimiti* se esiste un oggetto $Co_D \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}$ e, per ogni $I \in I^{\mathcal{C}}$, $E_I \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(D(I), Co_D)$ tali che:

(i): per ogni $I, J \in \mathcal{O}^I$, $F_{I,J} \in \mathcal{M}^I(I,J)$, $E_J \circ D(F_{I,J}) = E_I$, ovvero:



commuta;

(ii): per ogni $C \in \mathcal{O}^{\mathcal{C}}$, $T_I \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(D(I), C)$ tale che $T_J \circ D(F_{I,J}) = T_I$, esiste un unico $M \in \mathcal{M}^{\mathcal{C}}(Co_D, C)$ tale che $M \circ E_I = T_I$, ovvero t.c.:



commuta.

NB: Se il pullback può essere visto come una forma di prodotto finito condizionato, i colimiti sono forme di somme disgiunte n -arie condizionate.

1.2 Teoria delle categorie e logica

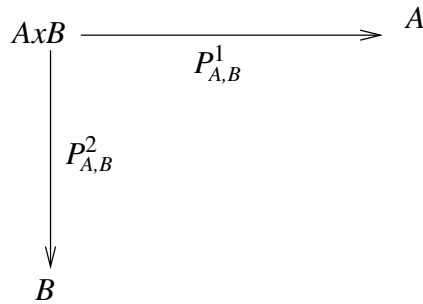
L'idea che sta alla base del rapporto tra logica e teoria delle categorie e logica (via interpretazione BHK) consiste nella corrispondenza:

proposizioni := oggetti di una categoria

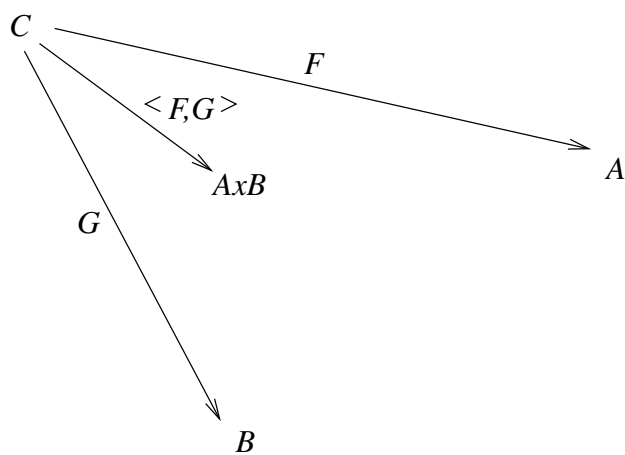
prove := morfismi

Al fine di individuare tale connessione nel caso dei problemi della teoria delle categorie appena introdotti e la logica occorre guardare ai primi scomponendoli secondo le due componenti dei problemi universali.

Nel caso del prodotto ad esempio, l'istanza di *esistenza* di una certa costruzione diviene un modo per esprimere le regole di *eliminazione* del connettivo corrispondente (cioè \wedge):



L'*universalità*, invece, diviene il corrispettivo della regola di *introduzione*:



2. Spazi Coerenti: definizioni di base

Si introducono le seguenti nozioni:

Definizione (i) $\mathbf{A} = (A, \approx_A)$ è una *rete* se e solo se A è un insieme e \approx_A è una relazione binaria *riflessiva* e *simmetrica* su A .

(ii) $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$ è uno *spazio coerente*, dove, per $\mathbf{A} = (A, \approx_A)$ rete:

$$|\mathbf{A}| := \{x \subseteq A \mid \forall a, a' \in x. a \approx_A a'\}$$

e \subseteq è un ordine parziale su $|\mathbf{A}|$.

NB: dato $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$, si adotta la seguente notazione:

$$(1) \quad x \in \mathbb{A} \quad := \quad x \in |\mathbf{A}|$$

$$(2) \quad x \subseteq \mathbb{A} \quad := \quad x \subseteq |\mathbf{A}|$$

Vale la seguente:

Proposizione Per ogni spazio coerente $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$:

(i) Se $a \in A$ allora $\{a\} \in \mathbb{A}$.

(ii) Se $x \in \mathbb{A}$ e $y \subseteq x$ allora $y \in \mathbb{A}$.

(iii) Se $x \in \mathbb{A}$ e per ogni $y, y' \in x$ vale $y \cup y' \in \mathbb{A}$, allora $\bigcup x \in \mathbb{A}$.

(iv) $\emptyset \in \mathbb{A}$

Dimostrazione (i), (ii) e (iv) seguono immediatamente dalle definizioni.

Per (iii) vale $z, z' \in \bigcup x$ sse $z \in y, z' \in y'$ per qualche $y, y' \in x$. Ma poiché $z, z' \in y \cup y' \in \mathbb{A}$, segue $z \approx_A z'$. ■

Si pone inoltre:

Definizione Per $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$ e $\mathbb{B} = (|\mathbf{B}|, \subseteq)$ spazi coerenti, e $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ funzione tale che, per ogni $x \in \mathbb{A}$, $F(x) \in \mathbb{B}$:

(i) F è *continua* se per ogni $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ che sia *diretto rispetto a* \subseteq in \mathbb{A} (ossia tale che per ogni $y, y' \in x$, $y \cup y' \in x$), vale:

$$F(\bigcup x) = \bigcup \{F(y) \mid y \in x\}$$

(ii) F è *stabile* se F è continua e, per ogni $x, x' \in \mathbb{A}$ tali che $x \cup x' \in \mathbb{A}$, $F(x \cap x') = F(x) \cap F(x')$.

Oss. 1: se F continua, F monotona: se $x, x' \in \mathbb{A}$ con $x \subseteq x'$, allora $x \cup x' = x'$ e $\{x, x'\}$ è diretto. Ergo $F(x') = F(\bigcup \{x, x'\}) = F(x) \cup F(x')$ e $F(x) \subseteq F(x')$.

Oss. 2: Equivalentemente, x è diretto risp. a \subseteq in \mathbb{A} se per ogni $y \in x$ e $y \subseteq y'$, $y' \in x$.

Oss. 3: si noti che da (i) segue $F(\emptyset) = \emptyset$ per ogni F continua.

NB: in (i) l'ipotesi fa sì che $\bigcup x \in \mathbb{A}$: se $z, z' \in \bigcup x$ con $z \in y$ e $z' \in y'$ ($y, y' \in x$), vale $z, z' \in y \cup y' \in \mathbb{A}$ da cui $z \approx_A z'$.

Analogamente $x = \bigcup \{F(y) \mid y \in x\} \in \mathbb{B}$: se $z, z' \in x$ allora $z \in y \in \mathbb{A}$, $z \in y' \in \mathbb{A}$; ma valendo $z, z' \in y \cup y' \in \mathbb{A}$ e F monotona, seguono $z, z' \in F(y \cup y')$ e $z \approx_A z'$.

NBB: allo stesso modo in (ii), $x \cup x' \in \mathbb{A} \Rightarrow x \cap x' \in \mathbb{A}$ per $x \cap x' \subseteq x \cup x'$.

Date $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ e $G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ funzioni stabili, è possibile definire un'ordine parziale tra esse mediante la condizione:

$$F \triangleleft G := \forall x, x' \in \mathbb{A}. x \subseteq x' \Rightarrow F(x) = F(x') \cap G(x)$$

Si verificano facilmente riflessività, antisimmetria e transitività di \triangleleft :

1. $F \triangleleft F$ perché F monotona.
2. Siano $F \triangleleft G$, $G \triangleleft F$ e $x \in \mathbb{A}$. Allora da $F(x) = F(x) \cap G(x)$ segue $y \in F(x) \Rightarrow y \in G(x)$, da $G(x) = G(x) \cap F(x)$ $y \in G(x) \Rightarrow y \in F(x)$.
3. Siano F, G, H funzioni stabili da \mathbb{A} in \mathbb{B} con $F \triangleleft G$ e $G \triangleleft H$. Da $y \in F(x)$ e $F \triangleleft G$ segue $y \in F(x')$ ($x \subseteq x'$) e $y \in G(x)$. Da quest'ultimo fatto, per $G \triangleleft H$ segue $y \in H(x)$ e quindi $y \in F(x') \cap H(x)$. Viceversa, da $y \in F(x') \cap H(x)$ e $F \triangleleft G$ segue $y \in G(x')$ ($F(x') = F(x') \cap G(x')$) quindi ($y \in H(x)$ e $G \triangleleft H$) $y \in G(x)$. Di nuovo, poiché $y \in F(x')$ e $F \triangleleft G$, $y \in F(x)$.

3. Spazi coerenti e CCC

Sia $\mathcal{STAB} = (\mathcal{O}^S, \mathcal{M}^S)$ la categoria definita da:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^S &:= \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \text{ spazio coerente}\} \\ \mathcal{M}^S &:= \{F \mid F \text{ funzione stabile}\}\end{aligned}$$

La categoria così definita risulta essere di un certo interesse in virtù delle seguenti nozioni e relativi risultati:

Definizione (i) Posto $\mathbf{T} := (\emptyset, \approx_T)$ con $x \approx_T y$ per ogni x, y , sia $\mathbb{T} := (|\mathbf{T}|, \subseteq) = (\{\emptyset\}, \subseteq) \in \mathcal{O}^S$.

(ii) Per $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^S$ e $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$, $\mathbb{B} = (|\mathbf{B}|, \subseteq)$, $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ si pone:

$$\begin{aligned}\mathbf{A\&B} &:= (A \dot{\cup} B = (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}), \approx_{\&}) \\ \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle a', 1 \rangle &:= a \approx_A a' \\ \langle b, 2 \rangle \approx_{\&} \langle b', 2 \rangle &:= b \approx_B b'\end{aligned}$$

Supposto inoltre $\langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle b, 2 \rangle$ per ogni $a \in A, b \in B$ sia:

$$\mathbb{A\&B} := (|\mathbf{A\&B}|, \subseteq)$$

NB: si verifica facilmente che $\approx_{\&}$ è riflessiva e simmetrica su $A \dot{\cup} B$ (e dunque che $\mathbb{A\&B} \in \mathcal{O}^S$) da:

$$\begin{aligned}(\rho) \quad \forall a \in A. a \approx_A a &\Rightarrow \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle a, 1 \rangle \\ \forall b \in B. b \approx_B b &\Rightarrow \langle b, 2 \rangle \approx_{\&} \langle b, 2 \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sigma) \quad \forall a, a' \in A. a \approx_A a' &\Leftrightarrow a' \approx_A a \Rightarrow \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle a', 1 \rangle \Leftrightarrow \langle a', 1 \rangle \approx_{\&} \langle a, 1 \rangle \\ \forall b, b' \in B. b \approx_B b' &\Leftrightarrow b' \approx_B b \Rightarrow \langle b, 2 \rangle \approx_{\&} \langle b', 2 \rangle \Leftrightarrow \langle b', 2 \rangle \approx_{\&} \langle b, 2 \rangle \\ \forall a \in A \forall b \in B. \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle b, 2 \rangle &\Leftrightarrow \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle b, 2 \rangle \text{ per def.}\end{aligned}$$

Vale la seguente:

Proposizione (i) \mathbb{T} è elemento terminale di \mathcal{STAB} .

(ii) \mathcal{STAB} ammette prodotto finito $\mathbb{A} \& \mathbb{B}$ per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^S$.

Dim. (i) Definita, per ogni $x \in \mathbb{A} \in \mathcal{O}^S$:

$$F(x) = \mathbf{0}$$

si ha che F è banalmente stabile ed è ovviamente unica.

(ii) Si verifica innanzi tutto che:

$$c \in \mathbb{A} \& \mathbb{B} \Leftrightarrow c = (x \times \{1\}) \cup (y \times \{2\})$$

per $x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}$.

Se infatti $c = (x \times \{1\}) \cup (y \times \{2\})$ con $x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}$ vale anche $c \subseteq (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$, e per definizione di $\approx_{\&}$, per ogni $z, z' \in c, z \approx_{\&} z'$. Viceversa, se $c \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ allora $c \subseteq A \cup B$ e, per ogni $z, z' \in c, z \approx_{\&} z'$. Dunque per $x \subseteq A$ e $y \subseteq B$ vale $c = (x \times \{1\}) \cup (y \times \{2\})$. Siano $w, w' \in x$: valendo $\langle w, 1 \rangle, \langle w', 1 \rangle \in c$ e $c \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$, da cui in particolare $\langle w, 1 \rangle \approx_{\&} \langle w', 1 \rangle$, segue $w \approx_A w'$. Ragionando analogamente per y si ricava infine $x \in A, y \in B$.

Inoltre la scrittura $c = (x \times \{1\}) \cup (y \times \{2\})$ è chiaramente unica:

$$\begin{aligned} \langle x \times \{1\} \rangle \cup \langle y \times \{2\} \rangle = c = \langle x' \times \{1\} \rangle \cup \langle y' \times \{2\} \rangle &\Rightarrow \langle x \times \{1\} \rangle = \langle x' \times \{1\} \rangle \\ &\quad \langle y \times \{2\} \rangle = \langle y' \times \{2\} \rangle \\ &\Rightarrow x = x', y = y' \end{aligned}$$

Ciò consente di concludere, per ogni \mathbb{A}, \mathbb{B} spazi coerenti:

$$\mathbb{A} \& \mathbb{B} \stackrel{f}{\cong} \mathbb{A} \times \mathbb{B}$$

per f definita da, per ogni $c \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$:

$$f(c) = \langle x, y \rangle$$

per $x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}$ (gli unici) tali che $c = x \cup y$ (vale infatti, per ogni $x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}, x \cup y \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ per definizione di $\approx_{\&}$, f iniettiva per l'unicità della scrittura e f monotona rispetto a \subseteq).

Si definiscono quindi le proiezioni $\pi_l : \mathbb{A} \& \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, $\pi_r : \mathbb{A} \& \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ mediante le condizioni seguenti, per ogni $c \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ tale che $c = \langle x \times \{1\} \rangle \cup \langle y \times \{2\} \rangle$ ($x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}$):

$$\pi_l(c) := x = \{z \mid \langle z, 1 \rangle \in c\}$$

$$\pi_r(c) := y = \{z' \mid \langle z', 2 \rangle \in c\}$$

Si verifica in modo immediato che π_l (analogamente, π_r) è stabile:

(i): se $x \sqsubseteq \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ diretto:

$$\pi_l(\bigcup x) = \{z \mid \langle z, 1 \rangle \in \bigcup x\} = \{z \mid \exists w \in x. \langle z, 1 \rangle \in w\} = \bigcup \{\pi_l(w) \mid w \in x\}$$

(ii): per ogni $x, x' \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ con $x \cup x' \text{sqin} \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ vale:

$$\pi_l(x \cap x') = \{z \mid \langle z, 1 \rangle \in x \wedge \langle z, 1 \rangle \in x'\} = \pi_l(x) \cap \pi_l(x')$$

Posto inoltre, per ogni $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{A}$, $G : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B}$ stabili, $\langle F, G \rangle : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{C}$:

$$\langle F, G \rangle (x) = F(x) \dot{\cup} G(x)$$

(la stabilità della quale segue immediatamente da quella di F, G), si verifica in modo altrettanto immediato che valgono:

$$\pi_l \circ \langle F, G \rangle = F$$

$$\pi_r \circ \langle F, G \rangle = G$$

Infatti, dato $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \pi_l \circ \langle F, G \rangle (x) &= \pi_l(\langle F, G \rangle (x)) \\ &= \pi_l(F(x) \dot{\cup} G(x)) \\ &= \{z \mid \langle z, 1 \rangle \in F(x) \dot{\cup} G(x)\} \\ &= F(x) \end{aligned}$$

È chiaro infine che $\langle F, G \rangle$ è unico per il risultato di isomorfismo precedente. ■

Un risultato importante per quanto riguarda \mathcal{STAB} è il fatto che, modulo isomorfismo, $\mathcal{M}^S(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \{F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \mid F \text{ stabile}\} \in \mathcal{O}^S$, per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^S$.

Un primo, cruciale passo in questa direzione è rappresentato dalla seguente:

Proposizione Sia $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ stabile, $x \in \mathbb{A}$ e $b \in F(x)$. Allora:

- (i): esiste un $x' \subseteq x$ tale che $\bar{x} < \aleph_0$ e $b \in F(x')$;
- (ii): se x' è *minimale* per cardinalità, allora x' è *minimo*, quindi unico, rispetto a \subseteq .

Dim. Banalmente:

$$x = \bigcup x_{fin} := \bigcup \{z \subseteq x \mid \bar{z} < \aleph_0\}$$

Ma x_{fin} è diretto rispetto a \subseteq in \mathbb{A} . Ergo:

$$F(x) = F\left(\bigcup x_{fin}\right) = \bigcup \{F(z) \mid z \subseteq x \wedge \bar{z} < \aleph_0\}$$

da cui (i).

(ii) Sia inoltre x' minimale per cardinalità (per ogni x'' che soddisfa (i) vale $\bar{x}' \leq \bar{x}''$). Se $x'' \neq x'$ soddisfa (i), poiché $x' \cup x'' \in \mathbb{A}$, segue per stabilità di F e ipotesi, $b \in F(x') \cap F(x'') = F(x' \cap x'') \neq \emptyset$. Ergo (vedi Oss. 3 in prec.) $x' \cap x'' \neq \emptyset$ e, essendo $x' \cap x'' \subseteq x'$ e x' minimale, $x' = x' \cap x''$, da cui $x' \subset x''$. ■

NB: da $F(\emptyset) = \emptyset$ e stabilità segue che dati $x, x' \in \mathbb{A}_{fin}$ che soddisfano (i), esiste sempre un $x'' = x \cap x' \subset x, x'$ che soddisfa (i).

Il risultato precedente, giustifica la seguente:

Definizione Data $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ stabile, la *traccia* di F è l'insieme $tr(F) \subset \mathbb{A}_{fin} \times B$ (con $\mathbb{A}_{fin} := \{x \sqsubseteq \mathbb{A} \mid \bar{x} < \aleph_0\}$) definito da:

$$tr(F) := \{ \langle x, b \rangle \mid (\text{l'unico}) x \in \mathbb{A}_{fin} \wedge b \in F(x) \wedge \forall x' \subset x. b \notin F(x') \}$$

NB: la traccia di una funzione stabile non è il suo grafo.

Il passaggio successivo consiste nella definizione di un nuovo spazio coerente:

Definizione Dati $\mathbb{A} = (|\mathbf{A}|, \subseteq)$, $\mathbb{B} = (|\mathbf{B}|, \subseteq)$ spazi coerenti e $\mathbb{A}_{fin} := \{x \in \mathbb{A} \mid \bar{x} < \aleph_0\}$ siano:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} := (\mathbb{A}_{fin} \times B, \approx_{\rightarrow})$$

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} := (|\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}|, \subseteq)$$

dove, per ogni $\langle x, b \rangle, \langle x', b' \rangle \in \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \langle x, b \rangle \approx_{\rightarrow} \langle x', b' \rangle &:= (x \cup x' \in \mathbb{A} \Rightarrow b \approx_B b') \wedge \\ &\wedge (x \cup x' \in \mathbb{A} \wedge x \neq x' \Rightarrow b \approx_B b' \wedge b \neq b') \end{aligned}$$

È immediato verificare riflessività e simmetria della relazione \approx_{\rightarrow} così definita.

Finalmente, si giunge alla seguente:

Proposizione Per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^S$:

$$(\mathcal{M}^S(\mathbb{A}, \mathbb{B}), \triangleleft) \stackrel{tr}{\cong} \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$$

Dim. È ovvio innanzi tutto che, per ogni $F \in \mathcal{M}^S(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, $tr(F) \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$: se $\langle x, b \rangle, \langle x', b' \rangle \in tr(F)$ e $x \cup x' \in \mathbb{A}$ allora per stabilità $b, b' \in F(x) \cup F(x') = F(\cup\{x, x'\}) \in \mathbb{B}$; se in più $b = b'$ allora $x = x'$ in quanto soluzioni minime di $b = b' \in F(x), F(x')$.

Sia poi $tr_c^{-1} : (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \rightarrow \mathcal{M}^S(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ la funzione che, per ogni $c \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}, x \in \mathbb{A}$, è definita da:

$$tr_c^{-1}(x) := \{b \mid \exists x' \subseteq x. \langle x', b \rangle \in c\}$$

Vale:

(i): $tr_c^{-1}(x) \in \mathbb{B}$. Da $b, b' \in tr_c^{-1}(x)$, $x', x'' \subseteq x \in \mathbb{A}$ t.c. $\langle x', b \rangle, \langle x'', b' \rangle \in c$ segue, per definizione di \approx_{\rightarrow} e $x' \cup x'' \in \mathbb{A}$, che $b \approx_B b'$.

(ii): tr_c^{-1} è continua. Se $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ è diretto, tenendo presente che $\cup x = \cup\{z \cup z' \mid z, z' \in x\} = x$ e che $z \cup z' \in x$, vale:

$$\begin{aligned} b \in tr_c^{-1}(\cup x) &\Rightarrow \exists z \subseteq \cup x. \langle z, b \rangle \in c \\ &\Rightarrow \exists w, w' \in x. z = w \cup w' \wedge \langle z, b \rangle \in c \\ &\Rightarrow b \in \cup\{tr_c^{-1}(w) \mid w \in x\} \end{aligned}$$

(iii): tr_c^{-1} è stabile. Se $x, x' \in \mathbb{A}$ con $x \cup x' \in \mathbb{A}$ e sia $b \in tr_c^{-1}(x) \cap tr_c^{-1}(x')$. Ciò significa che, per qualche $z \subseteq x, z' \subseteq x'$, $\langle z, b \rangle, \langle z', b \rangle \in c$. Ma $z \cup z' \subseteq x \cup x' \in \mathbb{A}$, da cui, per definizione di \approx_{\rightarrow} , $z = z'$ e $b \in tr_c^{-1}(z \cap z')$.

Si verifica poi che tr e tr^{-1} sono l'una l'inversa dell'altra.

(i): $tr_{tr(F)}^{-1}(x) = F(x)$. Sia $b \in tr_{tr(F)}^{-1}(x)$. Allora, per monotonia:

$$\exists z \subseteq x. \langle z, b \rangle \in tr(F) \Rightarrow b \in F(z) \subset F(x)$$

Viceversa, se $b \in F(x)$ ($x \in \mathbb{A}$) esiste uno $z \subseteq x$ tale che $z \in \mathbb{A}_{fin}$, $b \in F(z)$ e $\forall w \subset z. b \notin F(w)$. Ergo, $b \in tr_{tr(F)}^{-1}(x)$.

(ii): $tr(tr_x^{-1}) = x$. Sia $\langle z, b \rangle \in x$. Vale:

$$\langle z, b \rangle \in tr(tr_x^{-1}) \Leftrightarrow b \in tr_x^{-1}(z) \wedge \forall z' \subset z. b \notin tr_x^{-1}(z')$$

Ma, da $\langle z, b \rangle \in x$ segue $b \in tr_x^{-1}(z)$. Dato $z' \subset z$, $b \in tr_x^{-1}(z')$ implica l'esistenza di $w \subset z' \subset z$ con $\langle w, b \rangle \in x \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, da cui, per def. di \approx_{\rightarrow} , seguirebbe $z = w$. Per assurdo, segue allora l'ipotesi.

Si dimostra infine, per ogni $F, G \in \mathcal{M}^S(\mathbb{A}, \mathbb{B})$:

$$F \triangleleft G \Leftrightarrow tr(F) \subseteq tr(G)$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $\langle x, b \rangle \in tr(F)$. Segue $(F(x) = F(x) \cap G(x))$, $b \in G(x)$. Inoltre, per $x' \subset x$, segue $b \notin G(x')$ per $F(z) = F(x) \cap G(z)$, $b \notin F(z)$ e monotonia.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $tr(F) \subseteq tr(G)$, $x \subseteq x' \in \mathbb{A}$. Se $b \in F(x)$ allora $\langle z, b \rangle \in tr(F) \subseteq tr(G)$ per $x \supseteq z \in \mathbb{A}_{fin}$, da cui $b \in G(x)$ per monotonia. Segue $(F(x) \subseteq F(x'))$ $b \in F(x') \cap G(x)$. Viceversa, se $b \in F(x') \cap G(x)$ quindi $b \in F(x')$, allora per argomento analogo $\langle z, b \rangle \in tr(F)$ per un opportuno $x' \supseteq z \in \mathbb{A}_{fin}$ da cui $\langle z, b \rangle \in tr(G)$. Da $b \in G(x)$ segue $\langle z', b \rangle \in tr(G)$ per $x \supseteq z' \in \mathbb{A}_{fin}$, da cui, per minimalità, $z = z' \subseteq x$ e $b \in F(x)$. ■

Il secondo cruciale risultato relativo a \mathcal{STAB} è il seguente:

Teorema \mathcal{STAB} è una categoria cartesiana chiusa.

Dim. Avendo dimostrato che la categoria in questione ha elemento terminale ed ammette prodotto finito, bisogna dimostrare la risolubilità del problema dell'applicazione.

Innanzitutto, occorre una funzione $Ev : (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \& \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ che si definisce, per ogni $c \in (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}) \& \mathbb{A}$ tale che $c = x \dot{\cup} y$ ($x \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}, y \in \mathbb{A}$), mediante la condizione:

$$Ev(c) = Ev(x \dot{\cup} y = tr_x^{-1}(y))$$

Chiaramente la funzione così definita è stabile.

Sia inoltre, per ogni $\mathbb{C} \in \mathcal{O}^S$ e $F : \mathbb{C} \& \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$, $L_F : \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B})$ la funzione definita da, per ogni $x \in \mathbb{C}$:

$$L_F(x) := \{ \langle y, b \rangle \mid (\text{l'unico}) y \in \mathbb{A}_{fin}, b \in F(x \dot{\cup} y) \}$$

Di tale L_F è semplice verificare continuità e stabilità.

NB: la definizione è giustificata sulla base delle proposizioni precedenti: dati $x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{A}$ esiste un $x' \in \mathbb{C} \& \mathbb{A}$ t.c. $x' = x \dot{\cup} y$; inoltre per $b \in F(x \dot{\cup} y)$ esiste un minimo $z \in (\mathbb{C} \& \mathbb{A})_{fin}$ con $z \subseteq x \dot{\cup} y$ e $b \in F(z)$; ma per l'isomorfismo dimostrato in precedenza, esistono (e sono unici) $z' \in \mathbb{C}_{fin}, z'' \in \mathbb{A}_{fin}$ t.c. $z = z' \dot{\cup} z''$ e $b \in F(z' \dot{\cup} z'')$, da cui, per monotonia, $b \in F(x \dot{\cup} z'')$.

Si pone poi per ogni $G : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}, : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ ($\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D} \in \mathcal{O}^S$), $G \& H : \mathbb{A} \& \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{B} \& \mathbb{D}$ definita da, per ogni $x \in \mathbb{C} \& \mathbb{A}$ con $x = z \dot{\cup} z'$ ($z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{A}$):

$$(G \& H)x = G(z) \dot{\cup} H(z')$$

Verificare che il problema dell'applicazione è risolvibile in \mathcal{STAB} (equiv. che il diagramma corrispondente commuta) significa mostrare che, per ogni $x \in \mathbb{C} \& \mathbb{A}$:

$$Ev \circ (L_F \& i_{\mathbb{A}})(x) = F(x)$$

(dove $i_{\mathbb{A}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{A}$). Ma, supposto $x = z \dot{\cup} z'$ ($z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{A}$):

$$Ev \circ (L_F \& i_{\mathbb{A}})(x) := tr_{L_F(z)}^{-1}(z')$$

e:

$$b \in tr_{L_F(z)}^{-1}(z') \Leftrightarrow \exists w \subseteq z'. w \in \mathbb{A}_{fin} \wedge b \in F(z \dot{\cup} w)$$

Da cui la tesi segue in modo immediato per monotonia di F .

Infine si verifica l'unicità della funzione L_F definita in precedenza. Ciò segue dal fatto che, per ogni altra $G : \mathbb{C} \longrightarrow (\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B})$ vale:

$$\lambda_{Ev \circ (G \& i_{\mathbb{A}})} = G$$

Se infatti, per $x \in \mathbb{C}$, $\langle y, b \rangle \in \lambda_{Ev \circ (G \& i_{\mathbb{A}})}(x)$, segue che $y \in \mathbb{A}_{fin}$ e $b \in tr_{G(x)}^{-1}(y)$. Ergo, esiste un minimo $z \in \mathbb{A}_{fin}$, $z \subseteq y$ e $\langle z, b \rangle \in G(x)$. Dunque $b \in tr_{G(x)}^{-1}(z)$ e $\langle z, b \rangle \in \lambda_{Ev \circ (G \& i_{\mathbb{A}})}(x) \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, da cui $y = z$ e $\langle y, b \rangle \in G(x)$.

Viceversa, se $\langle y, b \rangle \in G(x) \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ segue $b \in tr_{G(x)}^{-1}(y)$, quindi $y \in \mathbb{A}_{fin}$ e $b \in Ev \circ (G \& i_{\mathbb{A}})(x \dot{\cup} y)$. Ergo, $\langle y, b \rangle \in \lambda_{Ev \circ (G \& i_{\mathbb{A}})}(x)$. ■

4. Funzioni lineari

Conclusa l'analisi delle funzioni stabili, le funzioni lineari si introducono come una naturale generalizzazione di queste: se le prime possono essere viste, da un punto di vista della teoria delle categorie, come funtori che preservano pullbacks e colimiti diretti (guardando agli spazi coerenti come categorie), le funzioni lineari preservano i colimiti arbitrari.

Si stabilisce ciò mediante la seguente:

Definizione Una funzione stabile $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ è *lineare* se, per ogni $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ tale che, per ogni $z, z' \in x$ $z \cup z' \in \mathbb{A}$, vale:

$$F(\bigcup x) = \bigcup \{F(z) \mid z \in x\}$$

NB: la condizione equivale alla preservazione di unioni qualunque: l'ipotesi su $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ è quella necessaria e sufficiente a garantire $\bigcup x \in \mathbb{A}$.

Un'analoga della proposizione già verificata per \mathcal{STAB} vale per $\mathcal{LIN} = (\mathcal{O}^L, \mathcal{M}^L)$ con:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^S &:= \{\mathbb{A} \mid \mathbb{A} \text{ spazio coerente}\} \\ \mathcal{M}^S &:= \{F \mid F \text{ funzione lineare}\}\end{aligned}$$

Proposizione $\mathcal{LIN} = (\mathcal{O}^L, \mathcal{M}^L)$ ammette (i) elemento terminale \mathbb{T} e, per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$, (ii) prodotto finito $\mathbb{A} \& \mathbb{B}$.

Dim. (i) La funzione stabile $F(x) = \emptyset$, per ogni $x \in \mathbb{A} \in \mathcal{O}^L$ è banalmente lineare.

(ii) È sufficiente verificare che le $P_{A,B}^1 \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A} \& \mathbb{B}, \mathbb{A})$, $P_{A,B}^2 \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A} \& \mathbb{B}, \mathbb{B})$ definite in precedenza sono funzioni lineari.

Se infatti $x \sqsubseteq \mathbb{A} \& \mathbb{B}$ con $z \cup z' \in \mathbb{A}$ per ogni $z, z' \in \mathbb{A}$ vale:

$$\begin{aligned}P_{A,B}^1(\bigcup x) &:= \{w \mid \langle w, 1 \rangle \in \bigcup x\} = \\ &= \{w \mid \langle w, 1 \rangle \in z \in x\} = \\ &= \bigcup \{P_{A,B}^1(z) \mid z \in x\}\end{aligned}$$

■

Un risultato fondamentale sulle funzioni lineari è la seguente:

Proposizione: $F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ stabile è lineare se e solo se $tr(F) = \{ \langle \{a\}, b \rangle \mid \{a\} \in \mathbb{A}, b \in F(\{a\}) \}$.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Per le proposizioni precedenti vale, se F è stabile e come da ipotesi, $F(x) = tr_{tr(F)}^{-1}(x)$. Ergo, se $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ tale che $z \cup z' \in \mathbb{A}$, segue:

$$b \in F(\bigcup x) \Leftrightarrow b \in tr_{tr(F)}^{-1}(\bigcup x) \Leftrightarrow \exists z \subseteq \bigcup x. \langle z, b \rangle \in tr(F)$$

Ma, per ipotesi, $\langle z, b \rangle \in tr(F)$ se $z = \{a\}$ per qualche $\{a\} \in \mathbb{A}$ e $b \in F(\{a\})$, da cui:

$$b \in \bigcup \{tr_{tr(F)}^{-1}(z) \mid z \in x\} = \bigcup \{F(z) \mid z \in x\}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia invece F è lineare e $\langle z, b \rangle \in tr(F)$. Ciò significa che $z \in \mathbb{A}_{fin}$, $b \in F(z)$ e per ogni $z' \subset z, b \notin F(z')$.

Sia $z^* = \{ \{a\} \mid z \in z \}$. Valgono:

$$z = \bigcup z^*$$

$$w, w' \in z \Rightarrow w \cup w' \in \mathbb{A}$$

Segue, $b \in F(z) \Leftrightarrow b \in F(\bigcup z^*) = \bigcup \{F(w) \mid w \in z^*\}$. Segue $b \in F(w)$ per qualche $w = \{a\} \in z^*$, da cui per minimalità, essendo $F(\emptyset) = \emptyset$, $z = w$ e $tr(F) = \{ \langle \{a\}, b \rangle \mid \{a\} \in \mathbb{A}, b \in F(\{a\}) \}$. ■

Tale risultato giustifica la seguente:

Definizione Data $F \in \mathcal{M}^L$, la *traccia lineare* di F è l'insieme $\text{lintr}(F)$ definito da:

$$\text{lintr}(F) := \{ \langle a, b \rangle \mid b \in F(\{a\}) \}$$

Si pone inoltre:

Definizione Per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$ e $a, a' \in A, b, b' \in B$ sia:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \multimap \mathbf{B} &:= (A \times B, \approx_{\multimap}) \\ \langle a, b \rangle \approx_{\multimap} \langle a', b' \rangle &:= (a \approx_A a' \rightarrow b \approx_B b') \wedge \\ &\quad \wedge (a \approx_A a' \wedge a \neq a' \Rightarrow b \approx_B b' \wedge b \neq b') \end{aligned}$$

Si pone:

$$\mathbb{A} \multimap \mathbb{B} := (|\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}|, \subseteq)$$

Vale quindi la seguente:

Proposizione $lintr$ è una funzione biettiva che associa ad ogni funzione lineare $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ uno ed un solo $lintr(F) \in \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$.

Dim. Si dimostra innanzi tutto che $lintr(F) \in \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$ per ogni $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ lineare. Se infatti $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle \in lintr(F)$ e supponiamo $a \approx_A a'$. Poiché allora $b \in F(a)$ e $b' \in F(a')$, con $x = \{\{a\}, \{a'\}\}$ è diretto, segue:

$$\begin{aligned} b \in F(\{a\}), b' \in F(\{a'\}) &\Rightarrow b, b' \in F(\{a\}) \cup F(\{a'\}) = \\ &= \bigcup \{F(z) \mid z \in x\} = \\ &= F(\bigcup x) = \\ &= F(\{a, a'\}) \in \mathbb{B} \end{aligned}$$

da cui $b \approx_B b'$.

Supponiamo inoltre $a \neq a'$ (con $a \approx_A a'$). Se fosse $b = b'$ si avrebbe anche:

$$\begin{aligned} b \in F(\{a\}), b \in F(\{a'\}) &\Rightarrow b \in F(\{a\}) \cap F(\{a'\}) \\ &\Rightarrow b \in F(\{a\} \cap \{a'\}) \\ &\stackrel{a \neq a'}{\Rightarrow} b \in F(\emptyset) = \emptyset \end{aligned}$$

Segue, per contraddizione, $b \neq b'$.

Si pone, per ogni $c \in \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}, x \in \mathbb{A}$:

$$lintr_c^{-1}(x) := \{b \mid \exists a \in x. \langle a, b \rangle \in c\}$$

Si dimostra poi:

(i): $\text{lintr}_w^{-1}(x) \in \mathbb{B}$. Se infatti $b, b' \in \text{lintr}_w^{-1}(x)$, allora, per $z, z' \in x \in \mathbb{A}$, vale $z \approx_A z'$ da cui, poiché $\langle z, b \rangle, \langle z', b' \rangle \in w$, $b \approx_B b'$ segue per definizione di $\approx_{-\circ}$.

(ii): lintr_w^{-1} è lineare.

(ii).1: lintr_w^{-1} è banalmente continua.

(ii).2: Supp. $z, z' \in \mathbb{A}$ con $z \cup z' \in \mathbb{A}$ e $b \in \text{lintr}_w^{-1}(z) \cap \text{lintr}_w^{-1}(z')$.

Allora, per qualche $a \in z, a' \in z', \langle a, b \rangle, \langle a', b \rangle \in w \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Valendo $a, a' \in z \cup z' \in \mathbb{A}$, ossia $a \approx_A a'$, segue $a = a' \in z \cap z'$.

Ergo, $b \in \text{lintr}_w^{-1}(z \cap z')$.

Viceversa, $b \in \text{lintr}_w^{-1}(z \cap z')$ implica $\exists a \in z, z'. \langle a, b \rangle \in w$ da cui $b \in \text{lintr}_w^{-1}(z), \in \text{lintr}_w^{-1}(z')$.

(ii).3: Sia $x \sqsubseteq \mathbb{A}$ con $z \cup z' \in \mathbb{A}$ per ogni $z, z' \in x$. Allora:

$$\begin{aligned} b \in \text{lintr}_w^{-1}\left(\bigcup x\right) &\Leftrightarrow \exists a \in \bigcup x. \langle a, b \rangle \in w \\ &\Leftrightarrow \exists z \in x \exists a \in z. \langle a, b \rangle \in w \\ &\Leftrightarrow b \in \bigcup \{\text{lintr}_w^{-1}(z) \mid z \in x\} \end{aligned}$$

(iii): lintr e lintr^{-1} sono l'una l'inversa dell'altra:

(iii).1: Per $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, $\text{lintr}_{\text{lintr}(F)}^{-1} = F$. Siano $x \in \mathbb{A}, b \in \text{lintr}_{\text{lintr}(F)}^{-1}(x)$,

Allora, per qualche $a \in x, \langle a, b \rangle \in \text{lintr}(F)$ da cui $b \in F(a)$ e (F crescente) $b \in F(x)$. Viceversa, se $b \in F(x)$ ($x \in \mathbb{A}$) e posto $x^* = \{\{a\} \mid a \in x\}$, vale $x = \bigcup x^*$ e $z \cup z' \in \mathbb{A}$ per ogni $z, z' \in x^*$.

Poiché F è lineare segue:

$$\begin{aligned} b \in F(x = \bigcup x^*) &\Rightarrow b \in \bigcup \{F(\{a\}) \mid a \in x\} \\ &\Rightarrow \exists a \in x. \langle a, b \rangle \in \text{lintr}(F) \\ &\Rightarrow b \in \text{lintr}_{\text{lintr}(F)}^{-1}(x) \end{aligned}$$

(iii).2: Per ogni $x \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ $\text{lintr}(\text{lintr}_x^{-1}) = x$.

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle \in \text{lintr}(\text{lintr}_x^{-1}) &\Leftrightarrow b \in \text{lintr}_x^{-1}(\{a\}) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in \{a\}. \langle z, b \rangle \in x \\ &\Leftrightarrow \langle a, b \rangle \in x \end{aligned}$$

■

NB: per ogni $F, G \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, posto:

$$F \subseteq^* G := \forall x \in \mathbb{A}. F(x) \subseteq G(x)$$

vale che \subseteq^* è un ordine parziale su \mathcal{M}^L e:

$$F \subseteq^* G \Leftrightarrow \text{lintr}(F) \subseteq \text{lintr}(G)$$

Il seguente risultato marca invece una differenza di fondo tra \mathcal{STAB} e \mathcal{LIN} :

Proposizione \mathcal{LIN} non è CCC.

Dim. Si dimostra che \mathcal{LIN} non ammette soluzione al problema dell'applicazione.

Si osserva innanzi tutto che la funzione $Ev \in \mathcal{M}^L((\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}) \& \mathbb{A}, \mathbb{B})$ ha una definizione ovvia. Si vuole infatti una funzione lineare tale che, per ogni $w \in (\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}) \& \mathbb{A}, z \in \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}, x \in \mathbb{A}$ con $w = z \dot{\cup} x$, valga:

$$Ev(z \dot{\cup} x) \in \mathbb{B}$$

e inoltre, per $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ la (unica) funzione lineare t.c. $z = \text{lintr}(F)$:

$$b \in Ev(\text{lintr}(F) \dot{\cup} x) \Leftrightarrow b \in F(x)$$

Ma:

$$\begin{aligned} b \in F(x) &\Leftrightarrow \exists a \in x. b \in F(\{a\}) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in x. \langle a, b \rangle \in \text{lintr}(F) = z \\ &\Leftrightarrow b \in \text{lintr}_z^{-1}(x) \end{aligned}$$

Posto conseguentemente, per ogni $w \in (\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}) \& \mathbb{A}$, $Ev(w = z \dot{\cup} x) = \text{lintr}_z^{-1}(x)$, supponiamo esista, per ogni $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{C} \& \mathbb{A}, \mathbb{B})$, una $L_F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{C}, \mathbb{A} \multimap \mathbb{B})$ t.c. $F = Ev \circ (L_F \& i_A)$. Tuttavia, supposto $b \in F(w)$ per $w \in \mathbb{C} \& \mathbb{A}$ vale ($x \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{A}$):

$$b \in Ev \circ (L_F \& i_A)(w = x \dot{\cup} y) \Leftrightarrow \exists z \in w. b \in Ev \circ (L_F \& i_A)(\{z\})$$

dove $z = \langle c, 1 \rangle$, con $c \in \mathbb{C}$, o $z = \langle a, 2 \rangle$ per $a \in \mathbb{A}$.

Poiché $\{z\} \in \mathbb{C} \& \mathbb{A}$ esistono e sono unici $x' \in \mathbb{C}$ e $y' \in \mathbb{A}$ t.c. $\{z\} = x' \dot{\cup} y'$.

Ciò significa che, se $z = \langle c, 1 \rangle$, $x' = \{c\}$ e $y' = \emptyset$ da cui:

$$\begin{aligned} b \in Ev \circ (L_F \& i_A)(\{z\}) &\Leftrightarrow b \in Ev(L_F(\{c\}) \dot{\cup} i_A(\emptyset)) \\ &\Leftrightarrow b \in \text{lintr}_{L_F(\{c\})}^{-1}(\emptyset) = \{b \mid \exists z' \in \emptyset. \langle z', b \rangle \in L_F(\{c\})\} = \emptyset \end{aligned}$$

Dunque $z = \langle a, 2 \rangle$. Ciò significa che $x' = \emptyset$ e $y' = \{a\}$. Segue:

$$\begin{aligned} b \in Ev \circ (L_F \& i_A)(\{z\}) &\Leftrightarrow b \in Ev(L_F(\emptyset) \dot{\cup} i_A(\{a\})) \\ &\Leftrightarrow b \in \text{lintr}_{\emptyset}^{-1}(\{a\}) = \{b \mid \exists z' \in \{a\}. \langle z', b \rangle \in \emptyset\} = \emptyset \end{aligned}$$

che contraddice la risolubilità in \mathcal{LIN} del problema dell'applicazione. ■

Rispetto alle velleità di una certa valenza logica dell'indagine il risultanto precedente sembra alquanto negativo, tenendo presente che, a livello logico appunto, la risolubilità del problema dell'applicazione coincide con la validità, modulo la corrispondenza $\times := \wedge$ e morfismi:=prove:=implicazioni, di $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$.

Tuttavia, tenendo presente la seguente:

Definizione Per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$ si definisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &:= (A \times B, \approx_{\otimes}) \\ \langle a, b \rangle \approx_{\otimes} \langle a', b' \rangle &\Leftrightarrow a \approx_A a' \wedge b \approx_B b' \end{aligned}$$

per ogni $a, a' \in A, b, b' \in B$. E:

$$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} := (|\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}|, \subseteq)$$

si giunge a dimostrare:

Proposizione In $\mathcal{L}I\mathcal{N}$ per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathcal{O}^L, F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{C} \otimes \mathbb{A}, \mathbb{B})$, esistono $Ev_{A,B} \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A} \multimap \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}, \mathbb{B})$ e un'unica $L_F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{C}, \mathbb{A} \multimap \mathbb{B})$ t.c.:

$$Ev_{A,B} \circ (L_F \otimes i_A) = F$$

Ovvero:

$$\begin{array}{ccc} C \otimes A & \xrightarrow{L_F \otimes i_A} & (A \multimap B) \otimes A \\ & \searrow F & \swarrow Ev_{A,B} \\ & & B \end{array}$$

commuta ($\mathcal{L}I\mathcal{N}$ è una categoria *monoidale chiusa*).

Dim. Per proposizioni precedenti vale che per $w \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{A}$ vale $b \in F(x)$ sse $\exists z \in w. b \in F(\{z\})$ sse $\exists c \in C \exists a \in A. b \in F(\{\langle c, a \rangle\})$. Ciò giustifica la

definizione, per ogni $x \in \mathbb{C}$:

$$L_F(x) := \{ \langle a, b \rangle \mid \exists c \in x. b \in F(\{ \langle c, a \rangle \}) \}$$

rispetto alla quale si verifica $L_F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{C}, \mathbb{A} \multimap \mathbb{B})$.

Vale poi:

$$w \in (\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}) \otimes \mathbb{A} \Leftrightarrow w := \{ \langle x, a \rangle \mid x \in \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}, a \in \mathbb{A} \} = \{ \langle \langle a', b \rangle, a \rangle \mid a' \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}, a \in \mathbb{A} \}$$

Si mostra quindi che l'enunciato del teorema vale per $Ev_{A,B}$ definita da, per ogni $w \in (\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}) \otimes \mathbb{A}$:

$$Ev_{A,B}(w) := \{ b \in \mathbb{B} \mid \exists a \in \mathbb{A}. \langle \langle a, b \rangle, a \rangle \in w \}$$

che si verifica parimenti essere lineare. ■

Un risultato apparentemente più banale ma storicamente cruciale per la nascita della logica lineare deriva dalla seguente:

Definizione Per ogni $\mathbb{A} \in \mathcal{O}^L$ si pone:

$$\begin{aligned} !\mathbb{A} &:= (\mathbb{A}_{fin}, \approx!) \\ x \approx! y &:= x \cup y \in \mathbb{A}_{fin} \end{aligned}$$

per $x, y \in \mathbb{A}_{fin}$ e:

$$!\mathbb{A} = (|!\mathbb{A}|, \subseteq)$$

Vale:

Proposizione Per ogni $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$:

$$\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B} = !\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$$

Dim. Per $w \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ esiste $F \in \mathcal{M}^L(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ stabile con $w = tr(F)$. Ergo:

$$w = tr(F) = \{ \langle x, b \rangle \mid x \in \mathbb{A}_{fin}, b \in F(x), \forall y \subset x. b \notin F(y) \} \subseteq \mathbb{A}_{fin} \times \mathbb{B}$$

Siano inoltre $\langle x, b \rangle, \langle x', b' \rangle \in w$ e $x \approx! x'$. Ciò significa che $x \cup x' \in \mathbb{A}_{fin}$ da cui, valendo $\langle x, b \rangle \approx_{\rightarrow} \langle x', b' \rangle$, segue $b \approx_B b'$. Supponendo inoltre $x \neq x'$ segue $b \neq b'$ da $x \approx! x'$ e $\langle x, b \rangle \approx_{\rightarrow} \langle x', b' \rangle$, da cui $w \in !\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$

Viceversa, se $w \in !\mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$ $w \subseteq \mathbb{A}_{fin} \times \mathbb{B}$. Se inoltre $\langle x, b \rangle, \langle x', b' \rangle \in w$ e $x \cup x' \in \mathbb{A}$ segue $x \approx! x'$ da cui $(w \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B})$ $b \approx_B b'$. Assumendo poi $x \neq x'$, segue $b \neq b'$ da $x \approx! x'$ e $w \in \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. ■

5. Gli spazi coerenti come semantica

Come si sarà già intuito da quante stabilito in precedenza, gli spazi coerenti e le funzioni lineari offrono la possibilità di una interpretazione di tipo semantico. Per $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$ si è già data la definizione di $\mathbb{T}, !\mathbb{A}, \mathbb{A} \& \mathbb{B}, \mathbb{A} \otimes \mathbb{B}, \mathbb{A} \multimap \mathbb{B}$. Per completare il quadro occorre la seguente:

Definizione (i) Sia $\mathbf{I} := (I = \{a\}, \approx_I)$ con $a \approx_I a$. Allora $\mathbb{I} := (|\mathbf{I}|, \subseteq) = (\{\emptyset, \{a\}\}, \subseteq)$ (si noti che questo spazio coerente è unico, modulo un banale isomorfismo).

(ii) Per ogni $\mathbb{A} \in \mathcal{O}^L$ si pone:

$$\begin{aligned} \sim \mathbf{A} &:= (A, \approx_{\sim \mathbf{A}}) \\ a \approx_{\sim \mathbf{A}} a' &:= a \neq a' \Rightarrow a \not\approx_{\mathbf{A}} a' \\ \sim \mathbb{A} &:= (|\sim \mathbf{A}|, \subseteq) \end{aligned}$$

(iii) Dati $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$, si definisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \& \mathbf{B} &:= (A \times B, \approx_{\&}) \\ \langle a, b \rangle \approx_{\&} \langle a', b' \rangle &:= \langle a, b \rangle = \langle a', b' \rangle \vee (a \approx_{\mathbf{A}} a' \wedge a \neq a') \vee (b \approx_{\mathbf{B}} b' \wedge b \neq b') \\ \mathbb{A} \& \mathbb{B} &:= (|\mathbf{A} \& \mathbf{B}|, \subseteq) \end{aligned}$$

(iv) Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathcal{O}^L$. Poniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} &:= (A \dot{\cup} B, \approx_{\oplus}) \\ \langle a, 1 \rangle \approx_{\&} \langle a', 1 \rangle &:= a \approx_{\mathbf{A}} a' \\ \langle b, 2 \rangle \approx_{\&} \langle b', 2 \rangle &:= b \approx_{\mathbf{B}} b' \\ \mathbb{A} \oplus \mathbb{B} &:= (|\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}|, \text{subse}q) \end{aligned}$$

(v) Per ogni $\mathbb{A} \in \mathcal{O}^L$:

$$\begin{aligned} ?\mathbf{A} &:= (\sim \mathbf{A}_{fin}, \approx_{?}) \\ x \approx_{?} y &:= x \cup y \in \sim \mathbf{A} \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

La *semantica delle prove* (di tipo *type-teoretico*) che è possibile dare per LL rispetto agli spazi coerenti la si definisce modulo la formulazione alla Tait del sistema in questione e si basa sull'idea seguente:

$$\text{LL} \stackrel{\mathcal{D}}{\vdash} A_1, \dots, A_n \Rightarrow \mathcal{D}^* = x_1, \dots, x_n \wedge x_i \in \mathbb{A}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

(ovvero $\mathcal{D}^* \in \mathbb{A}_1 \mathfrak{B} \dots \mathfrak{B} \mathbb{A}_n$).

La semantica delle prove viene dunque data modulo un'interpretazione $()^*$ delle formule di LL come spazi coerenti le cui clausole sono ovvie (valendo $(A)^* = \mathbb{A}$) tranne che per le seguenti:

$$\begin{aligned} (\top)^* &= (\mathbf{0})^* & := & \mathbb{T} \\ (\perp)^* &= (\mathbf{1})^* & := & \mathbb{I} \end{aligned}$$

Ci limitiamo alle clausole della definizione della semantica per il sistema LL_0^E . La definizione è per induzione sulla lunghezza della derivazione \mathcal{D} di Γ , e si assume per semplicità, nei casi in cui tale assunzione è rilevante, che il contesto sia costituita da un singola formula (si veda [2, pp. 54–56] per una definizione generale).

Definizione (i) Se $\text{LL} \stackrel{\mathcal{D}}{\vdash} A, \sim A$ si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle a, a \rangle \mid a \in A \}$.

Si verifica facilmente che $\mathcal{D}^* \in \mathbb{A} \mathfrak{B} \sim \mathbb{A}$ per il fatto che, assumendo per $\langle a, a \rangle, \langle a', a' \rangle \in \mathcal{D}^*$ $\langle a, a \rangle \neq \langle a', a' \rangle$ ovvero $a \neq a'$, si ha immediatamente per definizione che $a \not\approx_A a' \Rightarrow a \approx_{\sim A} a'$.

(ii) Se $\text{LL} \stackrel{\mathcal{D}}{\vdash} \top, B$, allora $\mathcal{D}^* = \emptyset$.

(iii) Se $\text{LL} \stackrel{\mathcal{D}}{\vdash} \mathbf{1}$, $\mathcal{D}^* = a \in I$.

(iv) Sia:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2 \\ A, B \sim A, C \end{array}}{B, C} \text{(cut)}$$

Si pone allora $\mathcal{D}^* = \{ \langle b, c \rangle \mid \exists a \in A. \langle a, b \rangle \in \mathcal{D}_1^* \wedge \langle a, c \rangle \in \mathcal{D}_2^* \}$.

Anche in questo caso la verifica che $\mathcal{D}^* \in \mathbb{B} \mathfrak{B} \mathbb{C}$ sotto l'ipotesi $\mathcal{D}_1^* \in \mathbb{A} \mathfrak{B} \mathbb{B}$, $\mathcal{D}_2^* \in \sim \mathbb{A} \mathfrak{B} \mathbb{C}$. *Supp.* infatti $\langle b, c \rangle, \langle b', c' \rangle \in \mathcal{D}^*$, $\langle b, c \rangle \neq \langle b', c' \rangle$ (ovvero $b \neq b'$ oppure $c \neq c'$), e per $a, a' \in A$, $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle \in \mathcal{D}_1^*$,

$\langle a, c \rangle, \langle a', c' \rangle \in \mathcal{D}_2^*$. Segue dall'ipotesi $\langle a, b \rangle \approx_{A \& B} \langle a', b' \rangle$, $\langle a, c \rangle \approx_{\sim_A \& B} \langle a', c' \rangle$. Su $a, a' \in A$ si danno tre casi possibili:

- (1) $a = a'$. Segue $a \approx_A a'$ e $a \approx_{\sim_A} a'$, da cui, se vale $b \neq b'$, segue $\langle a, b \rangle \neq \langle a', b' \rangle$ e quindi, da $a = a'$ ed essendo $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle \in \mathcal{D}_1^* \in \mathbb{A} \& \mathbb{B}$, $b \approx_B b'$ e $b \neq b'$. Se invece valesse $c \neq c'$ si ottiene, ragionando in modo analogo, $c \approx_C c'$ e $c \neq c'$.
- (2) $a \neq a' \wedge a \approx_A a'$. Segue $a \not\approx_{\sim_A} a'$, quindi $\langle a, c \rangle \neq \langle a', c' \rangle \in \mathcal{D}_2^*$ e $c \approx_C c'$ e $c \neq c'$.
- (3) $(a \neq a' \wedge) a \not\approx_A a'$. Si ricava $\langle b, c \rangle \neq \langle b', c' \rangle \in \mathcal{D}^*$, da cui $b \approx_B b'$ e $b \neq b'$.

NB: l' $a \in A$ della definizione di \mathcal{D}^* in questo caso è unico: se, per $\langle b, c \rangle \in \mathcal{D}^*$ esistono $a, a' \in A$ t.c. $\langle a, b \rangle, \langle a', b \rangle \in \mathcal{D}_1^*$, $\langle a, c \rangle, \langle a', c \rangle \in \mathcal{D}_2^*$ si ricava, da $a \neq a'$, $\langle a, b \rangle \neq \langle a', b \rangle \in \mathcal{D}_1^*$ che $a \approx_A a'$ e, da $\langle a, c \rangle \neq \langle a', c \rangle \in \mathcal{D}_2^*$, $a \approx_{\sim_A} a'$; segue $a = a'$.

(v) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{A, B} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{C, B}}{A \& C, B}^{(\&)}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle a, 1 \rangle, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \mathcal{D}_1^* \} \cup \{ \langle \langle c, 2 \rangle, b' \rangle \mid \langle c, b' \rangle \in \mathcal{D}_2^* \}$.

(vi) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{A, B}}{A \otimes C, B}^{(\otimes)_1}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle a, 1 \rangle, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(vii) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{C, B}}{A \otimes C, B}^{(\otimes)_2}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle c, 2 \rangle, b' \rangle \mid \langle c, b' \rangle \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(viii) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{B}}{\perp, B}^{(\perp)}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle a, b \rangle \mid a \in I, b \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(ix) Supponendo invece:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\frac{\mathcal{D}_1}{A, B} \quad \frac{\mathcal{D}_2}{C, D}}{A \otimes C, B, D}^{(\otimes)}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle \langle a, b \rangle, c \rangle, d \rangle \mid \langle a, c \rangle \in \mathcal{D}_1^*, \langle b, d \rangle \in \mathcal{D}_2^* \}$.

(x) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\mathcal{D}_1}{A \otimes B, C}^{(\mathfrak{B})}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \mid \langle \langle a, b \rangle, c \rangle \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(xi) Supp.:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\mathcal{D}_1}{?A, B}^{(W?)}$$

allora $\mathcal{D}^* := \{ \langle \emptyset, b \rangle \mid b \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(xii) Se:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\mathcal{D}_1}{?A, B}^{(?)}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle \{a\}, b \rangle \mid \langle a, b \rangle \in \mathcal{D}_1^* \}$.

(xiii) Valesse invece:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\mathcal{D}_1}{?A, ?A, B}^{(C?)}$$

si pone $\mathcal{D}^* := \{ \langle x \cup y, b \rangle \mid \langle \langle x, y \rangle, b \rangle \in \mathcal{D}_1^*, x \cup y \in \sim \mathbb{A} \}$.

(xiii) Se infine:

$$\mathcal{D} \equiv \frac{\mathcal{D}_1}{!A, ?B_1, ?B_2}^{(!)}$$

allora $\mathcal{D}^* := \{ \langle \langle \{a, a'\}, x \rangle, y \rangle \mid a, a' \in \mathbb{A}, \langle a, x \rangle, \langle a', y \rangle \in \mathcal{D}_1^*, x \cup y \in \sim \mathbb{B}_1 \text{ oppure } x \cup y \in \sim \mathbb{B}_2 \}$.

NB: Data questa definizione, è un esercizio dimostrare che se \mathcal{D}' è ottenuta da \mathcal{D} per eliminazione delle cesure, allora $\mathcal{D}'^* = \mathcal{D}$.

Il modello così definito è di tipo *type-teoretico* (ossia risente dell'impostazione alla base della corrispondenza formule-tipi alla Curry-Howard). Due sono gli ostacoli fondamentali alla sua trasformazione in un modello tradizionale (con conseguente definizione di una relazione di soddisfacibilità e teorema di adeguatezza):

- le coppie $\top/\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}/\perp$ hanno la medesima interpretazione;
- non esistono spazi coerenti vuoti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] P. L. Curien. Introduction to linear logic and ludics. 2003.
- [2] J. Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50:1–101, 1987.
- [3] J. Y. Girard. Cours de logique, Rome - Autumn 2004. disponibile presso <http://logica.uniroma3.it/uif> (cap. 9 e segg., in part.), 2004.
- [4] A. Masini S. Martini. A modal view of linear logic.
- [5] A. S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. CSLI, Lecture Notes No. 29, 1992.
- [6] R. Di Cosmo V. Danos. *The Linear Logic Primer*. disp. presso <http://dmi.ens.fr/~dicosmo>, 2003.