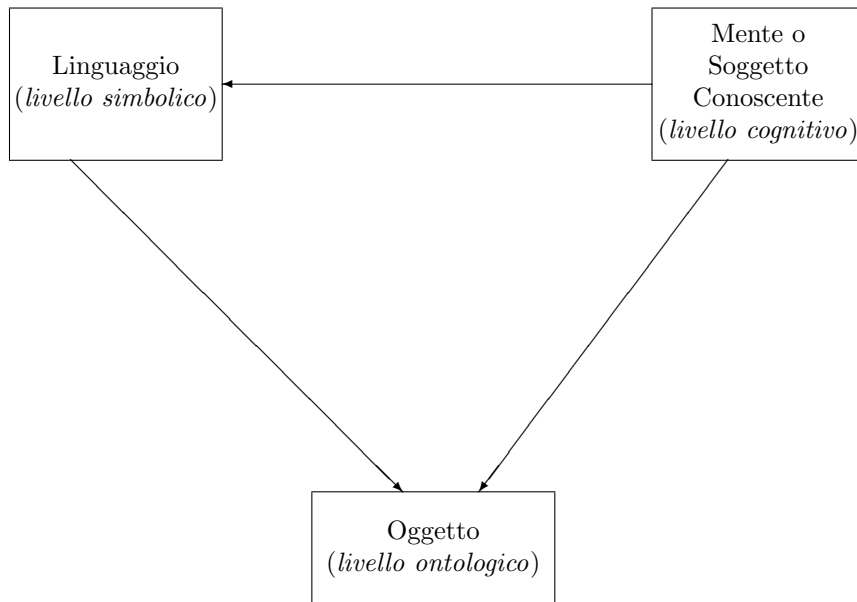


SEMINARIO DI LOGICA
A. A. 2003-2004
SECONDO SEMESTRE

**Teoria degli insiemi e filosofia:
le riflessioni di Kurt Gödel**

RICCARDO BRUNI

1. Il problema della conoscenza



1.(a) La realtà separata dei concetti matematici

Il “platonismo” di Gödel si presenta, in modo sempre più marcato, a partire dagli anni '40 del '900.

[Göd44], p. 128:

Le classi ed i concetti potrebbero, tuttavia, essere concepiti come oggetti reali, ossia classi come “pluralità di cose” o come strutture consistenti di una pluralità di cose, e concetti come le proprietà e le relazioni tra cose che esistono indipendentemente dalle nostre definizioni e costruzioni.

Mi pare che l'assunzione di simili oggetti sia altrettanto legittima di quella dei corpi fisici e ci sono quasi altrettante ragioni per credere nella loro esistenza. Essi sono necessari per ottenere un sistema matematico soddisfacente nello stesso senso in cui i corpi fisici sono necessari per una teoria soddisfacente delle nostre percezioni sensoriali ed in entrambi i casi è impossibile interpretare le proposizioni che si vuole asserire su questi enti come proposizioni relative ai ‘dati’, ossia, nell'ultimo caso, le percezioni sensoriali realmente presenti.

[Göd51], p. 320 (Gödel parla della concezione secondo la quale (i) la matematica è il frutto di convenzioni linguistiche e, (ii) le proposizioni matematiche sono tautologie prive di contenuto):

Mi pare tuttavia che, nonostante tutto, un ingrediente di questa teoria sbagliata della matematica sia perfettamente corretto e dischiuda in effetti la vera natura della matematica. Infatti, è corretto [sostenere] che una proposizione matematica non dice nulla sulla realtà fisica o psichica esistenti nello spazio-tempo, in quanto essa è vera già grazie al significato dei termini che occorrono in essa, indipendentemente dal mondo delle cose reali. Quello che è sbagliato, tuttavia, è che il significato dei termini (ossia dei concetti che essi denotano) sia visto come qualcosa di costruito dall'uomo, semplicemente consistente in convenzioni semantiche. La verità credo, è che questi concetti formano una realtà oggettiva a sé stante, che non possiamo creare o cambiare, ma solo percepire e descrivere.

[Göd51], p. 323:

Ho l'impressione che a seguito di una chiarificazione dei concetti in questione sarà possibile condurre questo genere di discussioni con il rigore matematico, e che il risultato sarà che (sotto certe ipotesi che difficilmente potrebbero essere rifiutate, ed in particolare l'assunzione che esiste qualcosa come una conoscenza matematica) il punto di vista Platonista è l'unico sostenibile.

1.(b) Sulle proposizioni matematiche

Gödel distingue ([Göd44], pp. 138-139 e [Göd51], pp. 320-321):

- proposizioni vere in virtù delle *definizioni* dei *termini* che vi occorrono (proposizioni *tautologiche*);
- proposizioni vere in virtù della *natura* dei *concetti* che vi occorrono (proposizioni *analitiche*);
- proposizioni vere in virtù delle proprietà e del comportamento delle cose (proposizioni *empiriche*).

Le prime (in quanto dipendenti da *definizioni*) hanno natura *convenzionale* e sono *prive di contenuto*. Le seconde presumono l'*esistenza* dei concetti come *realizzazioni* (o *significati*) dei termini che occorrono in esse, ed hanno, perciò, un carattere *oggettivo* (esse sono, in relazione alla realtà astratta dei concetti, del tutto simili alla terze che si riferiscono alla realtà sensibile).

Le proposizioni matematiche sono di questo tipo:

È vero che [gli assiomi della teoria degli insiemi] sono validi in virtù del significato del termine “insieme” - si potrebbe persino dire che essi esprimono il significato stesso del termine “insieme” - e quindi che essi potrebbero giustamente essere chiamati analitici; tuttavia il termine “tautologico”, ossia privo di contenuto, è completamente fuori luogo per essi, perché anche l’asserzione dell’esistenza di un concetto di insieme che soddisfa questi assiomi (o l’asserzione della consistenza di essi) è così distante dall’essere vuota che non può essere dimostrata senza fare ancora uso del concetto stesso di insieme, o qualche altro concetto astratto di natura simile. ([Göd51], p. 321)

Si assiste cioè ad un’*ineliminabilità* del contenuto astratto dalle proposizioni matematiche, che ne rivela la natura *oggettiva*.

1.(c) La mente secondo Gödel

In una nota sui risultati di indecidibilità del 1970 circa (l'ultimo contributo scritto sui teoremi di incompletezza), Gödel scrive:

Ciò di cui Turing non tiene affatto conto è che *la mente, nel suo uso, non è statica bensì costantemente in evoluzione*, ossia che si comprendono i termini astratti in modo sempre più preciso mano a mano che si procede nell'utilizzarli, e che un numero sempre maggiore di termini astratti entrano nella sfera della nostra comprensione. Ci potrebbero essere metodi sistematici per rendere attuale quest'evoluzione, che potrebbe così entrare a far parte della procedura. Dunque, per quanto ad ogni stadio il numero e la precisione dei termini astratti a nostra disposizione possa essere finito (e di conseguenza anche il numero degli *stati mentali distinguibili* di Turing), potrebbe *convergere all'infinito* nel corso dell'applicazione della procedura. Si noti che qualcosa del genere pare realizzarsi nel processo di costruzione di assiomi dell'infinito sempre più forti in teoria degli insiemi. ([Göd90c], p. 306)

[Nota: il riferimento a Turing è, in particolare, a [Tur36], §9, ossia all'argomento informale a sostegno della Tesi di Turing: ogni funzione intuitivamente calcolabile è computabile mediante una macchina di Turing. Un'assunzione fondamentale su cui il matematico britannico si basa e contro la quale Gödel argomenta nel passo succitato, è che il numero degli *stati mentali* debba essere necessariamente finito.]

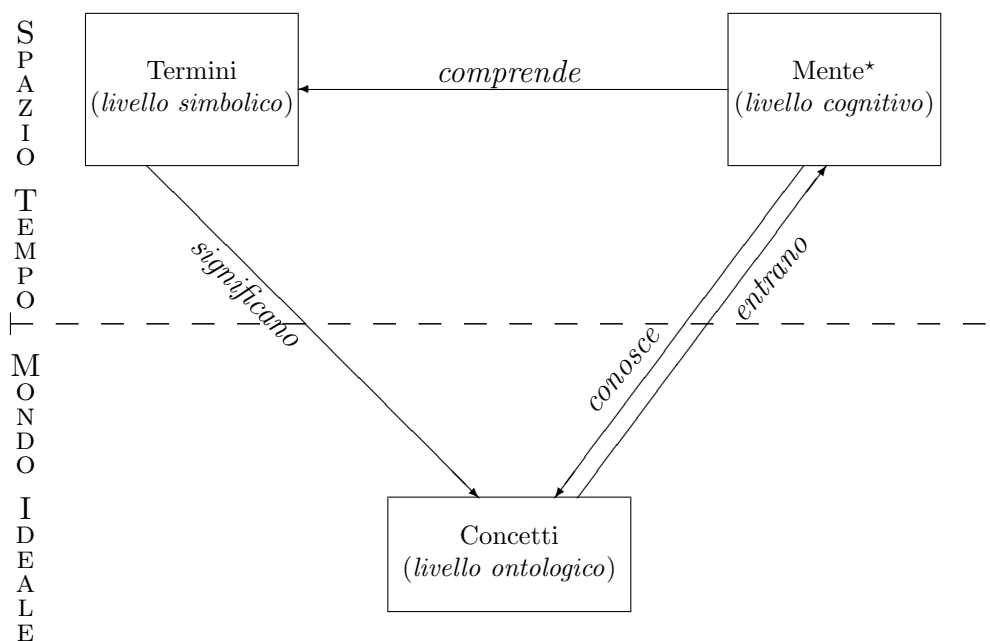
Si ricavano tre informazioni in particolare sulla concezione gödeliana della mente:

1. la mente umana ha una natura *non computazionale*, essa è *essenzialmente distinta* da una procedura effettiva di computo (ossia, da una macchina di Turing);
2. il suo carattere non computazionale (l'esistenza di un numero possibilmente infinito di stati mentali) emerge in relazione ai concetti astratti;
3. di ciò si ha un esempio particolare nella costruzione degli "assiomi dell'infinito".

Fatto: 1 è confermata anche da altre fonti. In [Wan74], p. 326 si legge ad esempio:

L'argomento di Turing diviene valido sotto due assunzioni ulteriori, che sono generalmente accettate oggi, ossia: 1. Non esiste mente separata dalla materia. 2. Il cervello funziona essenzialmente come un computer digitale. (2 potrebbe essere sostituita da: 2' Le leggi fisiche, nelle loro conseguenze osservabili, hanno un limite finito di precisione). Tuttavia, mentre Gödel ritiene che 2 sia molto probabile e 2' praticamente certa, egli crede che 1 sia un pregiudizio della nostra epoca, che verrà scientificamente confutato (forse per il fatto che non ci sono sufficienti cellule nervose per portare a termine le operazioni osservabili della mente).

3. La conoscenza matematica in Gödel



* La mente ha una natura non computazionale.

Probl.: c'è qualcosa di questo schema che si conserva per la conoscenza in generale? (cfr. gli scritti di fisica di Gödel?)

2.1 Gli assiomi dell'infinito: alcuni concetti di base

Richiamiamo brevemente alcune nozioni elementari:

1. Una relazione binaria $<$ è un *buon ordine* su un insieme X (X è *bene ordinato* da $<$), se, per ogni $x, y, z \in X$:
 - (i) $x \not< x$ ($<$ è *a-riflessiva*);
 - (ii) $x < y \ \& \ y < z \Rightarrow x < z$ ($<$ è *transitiva*);
 - (iii) $x < y \ \text{o} \ y < x \ \text{o} \ x = y$ ($<$ è *connessa*);
 - (iv) ogni sottoinsieme non vuoto di X ha un primo elemento (rispetto a $<$).
2. Un insieme X è un *numero ordinale* se X è *transitivo* ($x \in X \Rightarrow x \subseteq X$) ed è bene ordinato dalla relazione di appartenenza \in .
3. Nel seguito usiamo $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, per numeri ordinali ed indichiamo con Ω la collezione di tutti gli ordinali.
 - (i) Se $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha < \beta := \alpha \in \beta$;
 - (ii) $\emptyset := 0 \in \Omega$;
 - (iii) $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\} = \inf\{\beta \mid \beta > \alpha\} \in \Omega$ ($\alpha + 1$ è il *successore* di α);
 - (iv) se $X \subseteq \Omega$ e $X \neq \emptyset$, allora $\sup X = \bigcup X \in \Omega$ (un $\alpha \in \Omega$ tale che $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$ è un ordinale *limite*).

[Ω è la più piccola collezione che contiene 0, ed è chiusa sotto *successore* e *limite*.]

Si dimostra che vale: Ogni insieme bene ordinato è isomorfo ad un unico numero ordinale (i numeri ordinali sono i *tipi d'ordine* di insiemi bene ordinati).

Si pone:

4. $\alpha \in \Omega$ è un *numero cardinale* se, per ogni $\beta < \alpha$, $|\alpha| \neq |\beta|$. Dove:

(i) per ogni insieme bene ordinato W :

$$|W| = \text{il più piccolo } \alpha \in \Omega \text{ tale che } |W| = |\alpha|$$

(W ha *cardinalità* α);

(ii) $|X| = |Y|$ se e solo se esiste una *biezione* $f : X \rightarrow Y$ (X è *equinumeroso* a Y).

5. Si definisce nel modo seguente la *gerarchia dei cardinali infiniti* (gli *aleph*):

$$\begin{aligned}\aleph_0 &= \omega = |\mathbf{N}| \\ \aleph_{\alpha+1} &= \omega_{\alpha+1} = \text{il più piccolo cardinale maggiore di } \aleph_\alpha \\ \aleph_\lambda &= \sup\{\omega_\beta | \beta < \lambda\} \text{ } (\lambda \text{ ordinale limite})\end{aligned}$$

Se vale l'Assioma di Scelta ogni insieme è bene ordinabile, dunque esiste un più piccolo ordinale ad esso equinumeroso, quindi (supposto che quest'ultimo sia $\geq \omega$), per qualche $\alpha \in \Omega$, l'insieme ha cardinalità \aleph_α .

Un esempio di nozione legata ai cardinali infiniti ed agli assiomi ad essi relativi è quella di *inaccessibilità*:

6. Per ogni ordinale limite α si pone:

$$\text{cf}(\alpha) = \min\beta [\sup\{\gamma_\xi \mid \xi \leq \beta \ \& \ \gamma_\xi < \alpha\} = \alpha]$$

($\text{cf}(\alpha)$ è il *carattere di cofinalità* o semplicemente la *cofinalità* di α), laddove:

$$\begin{aligned} \text{cf}(0) &:= 0 \\ \text{cf}(\alpha + 1) &:= 1 \end{aligned}$$

Si dimostra che per ogni cardinale infinito \aleph_α vale:

$$\text{cf}(\aleph_\alpha) = \min\beta \left[\sum_{\xi \leq \beta} \gamma_\xi = \aleph_\alpha \ \& \ \gamma_\xi < \aleph_\alpha \ (\xi \leq \beta) \right]$$

7. Un cardinale infinito \aleph_α è *regolare* se $\text{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$.
8. Un cardinale infinito \aleph_α più che numerabile ($\aleph_\alpha \neq \aleph_0$) è *debolmente inaccessible* se \aleph_α è un cardinale *limite* (α è un ordinale limite) *regolare*.
9. Un cardinale infinito \aleph_α più che numerabile ($\aleph_\alpha \neq \aleph_0$) è (*fortemente*) *inaccessible* se \aleph_α è un *limite forte* ($\beta < \aleph_\alpha \Rightarrow 2^\beta < \aleph_\alpha$) ed è *regolare*.

[Nota: se κ è un cardinale inaccessible, $|X| < \kappa \Rightarrow |\wp(X)| = 2^{|X|} < \kappa$.
Ossia κ non può essere ottenuto mediante le usuali operazioni insiemistiche.]

Si dimostra:

- (i) La proposizione che asserisce l'esistenza di un cardinale inaccessible (anche debolmente tale) è indecidibile in ZFC;
- (ii) La consistenza di ZFC è dimostrabile in ZF+“Esiste un cardinale inaccessible”.

2.2 Gli assiomi dell'infinito : sull'Ipotesi del Continuo di Cantor

Alcune formulazioni possibili del Problema del Continuo:

- Qual'è la cardinalità dell'insieme dei numeri reali?
- Quanti sono i punti su una retta?
- Quanti sono i sottoinsiemi di numeri naturali?
- Quanti sono gli ordinali numerabili?

Se consideriamo l'insieme dei reali \mathbf{R} e poniamo, come si è soliti fare, $|\mathbf{Z}| = |\mathbf{Q}| = |\mathbf{N}| = \aleph_0$, si può dimostrare (*argomento diagonale*) che:

$$|\mathbf{R}| = \mathbf{c} \neq \aleph_0$$

Quindi, esistono almeno due *numeri cardinali* infiniti.
D'altra parte vale anche:

$$|\wp(\mathbf{N})| = 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}$$

da cui:

$$\aleph_0 < \mathbf{c}$$

Problema: esistono numeri cardinali intermedi tra \aleph_0 e \mathbf{c} ?

Il matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) congetturò che la risposta a tale quesito fosse negativa, assumendo che (*Ipotesi del Continuo - CH*), 'localmente' valga:

$$\mathbf{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Facendo uso di assunzioni insiemistiche estremamente forti (*principio del buon ordinamento - WOP*), Cantor giunse ad individuare una gerarchia indefinita di numeri cardinali transfiniti:

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots < \aleph_n < \dots < \aleph_\omega < \dots < \aleph_\alpha < \dots$$

rispetto alla quale egli fece una sorta di 'ipotesi di uniformità', generalizzando *CH* per ogni ordinale α (*Ipotesi Generalizzata del Continuo - GCH*):

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Problema: è possibile giustificare o confutare la teoria cantoriana, ossia dimostrare o refutare nella teoria degli insiemi $CH(GCH)$?

Due date fondamentali:

1938 Gödel dimostra la *consistenza* di GCH (e dell'*assioma di scelta* AC - un equivalente di WOP) con gli assiomi della teoria degli insiemi ZF (GCH non può essere *refutata* in ZF).

1963 Paul J. Cohen dimostra l'*indipendenza* di GCH (e di AC) da ZF (GCH non può neanche essere *dimostrata* partendo dagli usuali assiomi della teoria degli insiemi).

Con il risultato di Cohen si verifica la congettura che Gödel aveva avanzato fin dagli anni '30.

Il 'Programma di Gödel': è possibile trovare un'estensione *ragionevole* di ZF nella quale siamo in grado di decidere il Problema del Continuo di Cantor?

2.3 Gli assiomi dell'infinito: i riferimenti nell'opera gödeliana

Il primo riferimento agli assiomi dell'infinito nell'opera gödeliana può essere considerato il seguente passo dell'articolo sulla logica matematica di Russell:

Appare inoltre plausibile ritenere che per decidere certi problemi della teoria astratta degli insiemi e anche certe questioni della teoria dei numeri reali, saranno necessari nuovi assiomi basati su qualche idea finora sconosciuta. Forse le stesse difficoltà apparentemente insormontabili che altri problemi matematici hanno presentato per molti anni sono dovute al fatto che gli assiomi necessari non sono stati ancora trovati. ([Göd44], p. 121.)

Tuttavia, è solo con gli articoli dedicati al Problema del Continuo che il riferimento di Gödel si chiarisce del tutto.

L'ipotesi cantoriana fa parte del novero di quei problemi che presumibilmente necessitano di nuovi assiomi:

Ovviamente, [...] ci sono (assumendo la consistenza degli assiomi) tre possibilità a priori rispetto alla congettura di Cantor: Essa potrebbe essere dimostrabile, indimostrabile o indecidibile. La terza alternativa (che è solo una formulazione precisa della congettura avanzata in precedenza in riferimento al fatto che le difficoltà del problema non sono forse di natura esclusivamente matematica) appare la più probabile, e cercare una dimostrazione di questo fatto sembra attualmente uno dei modi più promettenti per attaccare il problema. ([Göd47], p. 181.)

La posizione di Gödel, è il frutto di considerazioni che legano l'esistenza di problemi indecidibili con un'approccio di tipo platonista alla matematica:

Si deve notare, tuttavia, che anche se si riuscisse a dimostrare l'indimostrabilità [da ZFC], cioè [...] non sistemerebbe affatto la questione in modo definitivo. Solo chi (come l'intuizionista) negasse che i concetti e gli assiomi della teoria degli insiemi classica non hanno significato (o non hanno un significato ben preciso) potrebbe ritenersi soddisfatto da una simile soluzione, non chi credesse che essi descrivono una qualche ben determinata realtà. Perché in questa realtà la congettura di Cantor deve essere vera o falsa e la sua indecidibilità dagli assiomi conosciuti oggi può significare solamente che questi assiomi non contengono una descrizione completa di questa realtà; e tale convinzione non è affatto illusoria, dal momento che è possibile indicare dei modi mediante i quali potrebbe essere raggiunta una decisione sulla questione, anche se questa fosse indecidibile rispetto agli assiomi nella loro forma presente. (*Ibid.*, p. 181.)

Fatto: ci sono esempi di assiomi che (i) *traggono la loro ragion d'essere dalla possibilità di estendere la teoria degli insiemi lavorando sui suoi concetti di base*, e che si candidano a completare nel modo suddetto il novero delle conoscenze matematiche, in quanto, (ii), *essi dimostrano di avere conseguenze del tutto simili* (rendere decidibili problemi altrimenti indecidibili) *in aree diverse da ciò a cui essi direttamente si riferiscono*:

Perché in primo luogo la collezione degli assiomi della teoria degli insiemi non formano affatto un sistema chiuso in se stesso, ma, al contrario, lo stesso concetto di insieme sul quale essi si fondano, suggerisce un'estensione mediante nuovi assiomi che asseriscano l'esistenza di iterazioni ancora ulteriori dell'operazione "insieme di". (*Ibid.*, p. 181.) [...]

Che questi assiomi hanno conseguenze anche al di fuori del dominio dei numeri transfiniti molto grandi, che costituiscono il loro oggetto [di riferimento] immediato, può essere provato; si può dimostrare, sotto l'assunzione di consistenza, che ognuno di essi (fin quando si tratta di principi noti) aumenta il numero di proposizioni decidibili anche nel campo delle equazioni Diofantee. (*Ibid.*, p. 182.)

L'idea di Gödel, che è il frutto di una miscela che lega l'incompletezza sintattica e l'incompletabilità dei sistemi d'assiomi, alla tematica insiemistica, era stata già espressa in modo chiaro in una conferenza a Princeton del 1946:

1. In virtù dei teoremi di incompletezza non è possibile confinarsi ad un unico sistema d'assiomi (consistente e ricorsivamente assiomatizzabile), perché “la contemplazione del formalismo stesso dà origine a nuovi assiomi che sono altrettanto evidenti e giustificati di quelli da cui si è partiti” (ad esempio la proposizione che esprime la consistenza del sistema), e “questo processo di estensione può essere iterato nel transfinito” ([Göd65b], p. 151).
2. Conseguentemente, non può esistere una procedura effettiva che enumeri tutti gli enunciati che sono il frutto di tale ‘contemplazione’. Tuttavia, “ciò non esclude che tutti questi passaggi (o almeno quanti, tra questi, forniscono qualcosa di nuovo per il dominio di proposizioni a cui si è interessati) possano essere descritti e raccolti insieme in qualche modo non-costruttivo” (*Ibid.*, p. 151).
3. Se si considerano ad esempio gli assiomi dell'infinito, si ha che le proposizioni indecidibili in un sistema d'assiomi come da ipotesi, possono essere decise nella teoria ottenuta da ZF per aggiunta di certi assiomi del genere (segue da certe proprietà insiemistiche). Inoltre, “potrebbe esistere, ad esempio, una caratterizzazione [non costruttiva] del tipo seguente: Un assioma dell'infinito è una proposizione che possiede una certa struttura formale (decidibile) e che, in aggiunta, è vero” (*Ibid.*, p. 151).
4. Gödel sottolinea che “[n]on è impossibile che per un tale concetto di dimostrabilità valga qualche teorema di completezza che asserisca come ogni proposizione esprimibile nella teoria degli insiemi risulti decidibile dagli assiomi attuali più qualche asserzione vera sull'estensione dell'universo insiemistico” (*Ibid.*, p. 151).

Tuttavia, fatto fondamentale, Gödel *non crede* che gli assiomi dell'infinito siano sufficienti a decidere il problema del continuo (fatto dimostrato solo a seguito della dimostrazione di indipendenza di Cohen):

Riguardo al problema del continuo, ci sono poche speranze di poterlo risolvere sulla base di principi oggi noti (la succitata dimostrazione dell'irrefutabilità dell'ipotesi del continuo, ad esempio, vale per tutti questi senza alcun cambiamento). Ma probabilmente ne esistono degli altri, basati su qualche principio finora sconosciuto; è possibile anche che, oltre agli assiomi ordinari, agli assiomi dell'infinito e [ad assiomi relativi al concetto di "proprietà di un insieme" - il secondo concetto primitivo della teoria¹], esistano degli altri assiomi (fin qui sconosciuti) della teoria degli insiemi che una comprensione più profonda dei concetti sottostanti la logica e la matematica ci permetta di riconoscere essere implicati da questi concetti. (*Ibid.*, p. 182.)

E ancora, in una nota aggiunta a [Göd40] (il lavoro che contiene una presentazione della dimostrazione di consistenza di *CH* con gli assiomi di ZFC):

Nota aggiunta nel 1951: La suddetta dimostrazione consistenza può essere facilmente estesa al caso in cui assiomi più forti dell'infinito vengano aggiunti² (ad es., l'assioma di esistenza di numeri inaccessibili, o altri forniti da P. Mahlo) [...]. *Nota aggiunta nel 1966*: ciò vale per gli assiomi dell'infinito e per altri assiomi aggiuntivi noti all'epoca (1951). ([Göd40], p. 69.)

Rimane il fatto che Gödel guardasse (e continuasse a guardare anche *dopo* il 1966³) ad assiomi del genere come a proposizioni *intimamente legate* ai concetti primitivi stessi della teoria degli insiemi.

¹N. d. T.: Quest'aggiunta è tratta quasi letteralmente dalla nota 17 di [Göd47], alla quale, con una nota in questo punto, il passo originario di Gödel rimanda.

²N. d. T.: Un fatto, questo, sottolineato da Gödel fin dalla prima presentazione del risultato (1938). Si veda lo schema riassuntivo sulla posizione di Gödel nei confronti dell'ipotesi cantoriana.

³Si ricordi la nota *del 1972* citata in precedenza.

2.4 Gli assiomi dell'infinito: evoluzione della posizione di Gödel sull'Ipotesi del Continuo

	Verità/Falsità	GCH e ZF	Nuovi assiomi
1938	GCH è vera ^a	?	GCH è consistente con ZF+ “assiomi più forti dell'infinito”
1939 – 40	?	GCH è indipendente da ZF(C)	GCH è assolutamente indecidibile ^b
1947 – 64	GCH è falsa ^c	–	È possibile che esistano assiomi in grado di decidere GCH (confutandola)
1970	–	–	Si dimostra in ZF+ \mathbf{Ax}^2 che $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ ^d ; CH è dimostrabile in ZF+ certi “assiomi plausibili”

^a L'assioma di costruibilità ($V = L$) è un “completamento naturale” della teoria degli insiemi e $ZF + V = L \vdash GCH$ vale.

^b Ciò significa che non esiste alcuna dimostrazione, riconoscibile come tale dalla mente umana, di essa o della sua negazione.

^c Cfr. ad es., [Göd47], pp. 184-185: GCH ha conseguenze implausibili.

^d Posizione poi sostituita da: si presume $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \aleph_2$.

2.5 Gli assiomi dell'infinito: il concetto iterativo di insieme e l'inesauribilità della matematica

Ma se gli assiomi dell'infinito sono irrilevanti per la decisione del Problema del Continuo di Cantor, perché Gödel insiste tanto su simili principi?

Nella già citata conferenza del 1951 ([Göd51]), Gödel fornisce un argomento emblematico al proposito.

La questione generale è l'assiomatizzazione della matematica intesa come *collezione delle proposizioni matematiche valide o delle proposizioni percepite con certezza matematica*.

1. Assumiamo la validità di tutti i *metodi matematici* comunemente utilizzati (*concezione classica*). Ciò significa assumere che la matematica (nel senso suddetto) sia riducibile alla teoria degli insiemi.
2. “[S]e si vogliono evitare i paradossi della teoria degli insiemi senza introdurre qualcosa di completamente estraneo alla prassi matematica attuale, si deve assiomatizzare il concetto di insieme per passi successivi” ([Göd51], p. 306).

Ciò significa che:

- (a) si parte da una collezione di ‘oggetti primitivi’ (ad esempio i numeri naturali);
- (b) si procede generando nuovi ‘oggetti’ iterando (un numero finito a piacere di volte), l'operazione di potenza insiemistica (si ottengono gli insiemi di numeri naturali, gli insiemi di insiemi di numeri naturali, ecc.).

Ciò conduce a due generalizzazioni:

- (c) si estende nel transfinito la costruzione precedente, iterando l'operazione di potenza insiemistica un numero eventualmente transfinito di volte su \mathbf{N} (quindi, se $\wp^0(A)$ è la potenza insiemistica di A , $\wp^{\alpha+1}(A) = \wp(\wp^\alpha(A))$, e, per λ ordinale limite, $\wp^\lambda(A) := \bigcup_{\beta < \lambda} \wp^\beta(A)$, si considera, per ogni ordinale α , il risultato dell'operazione $\wp^\alpha(\mathbf{N})$);
- (d) si estende la procedura (a)-(c) ad una qualsiasi operazione Φ che genera insiemi a partire da insiemi.

3. Gödel prosegue: “Ma siamo giunti ad un termine ora? No, perché si può richiedere che non solo la procedura descritta possa essere eseguita rispetto ad una qualsiasi operazione, ma che in più debba esistere un insieme che è chiuso rispetto ad essa, ossia un insieme che ha la proprietà che, se la procedura (rispetto ad un'operazione qualsiasi) viene applicata ad elementi di quest'insieme, essa fornisce ancora elementi dell'insieme.”

Egli conclude allora:

Si sarà realizzato, penso, che non siamo ancora giunti ad un termine, né ci può essere alcun termine a *questa* procedura di costruzione di nuovi assiomi dal momento che la formulazione di un assioma fino ad un certo livello dà vita all'assioma successivo.

Gödel enuncia poi un teorema:

Si può dimostrare che gli assiomi per insiemi di livello alto, non sono affatto confinati, nella loro rilevanza, a questi stessi insiemi, ma, al contrario, possiedono conseguenze anche per il livello 0-ario, ossia la teoria dei numeri interi. Per essere più esatti, ognuno di questi assiomi insiemistici comporta la soluzione di certi problemi diofantei che risultavano essere indecidibili sulla base degli assiomi precedenti.

Riassumendo, la convinzione di Gödel sembra essere quella secondo la quale, *se si assume un approccio classico alla matematica*, si desume:

- (i) l'esistenza di una successione infinita di assiomi (i quali sono il frutto dell' 'esecuzione' della 'procedura' descritta), "perchè la stessa formulazione degli assiomi fino ad un certo livello dà vita all'assioma successivo" (la matematica è *incompletabile*: non può essere racchiusa in nessun sistema finito di assiomi e lo è nel senso che i concetti stessi che ne sono alla base, suggeriscono l'estensione dei principi assunti fino ad un certo livello);
- (ii) gli assiomi dell'infinito, sono un *prodotto naturale* dell'assiomatizzazione del *concetto inteso* della teoria degli insiemi (il concetto di *insieme iterativo*);
- (iii) essi forniscono un'estensione significativa delle nostre conoscenze matematiche rendendo decidibili enunciati precedentemente indecidibili.

In questo senso, gli assiomi dell'infinito sono il paradigma di un processo che è alla base dell'intera conoscenza matematica: essi discendono dal *significato stesso* del concetto (quello intuitivo di aggregato o collezione) che, nella sua versione non antinomica (di insieme iterativo), è alla base della porzione matematica che si sta prendendo in considerazione.

3. L'intuizione matematica

Il luogo 'classico', all'interno dell'opera gödeliana, nel quale questa nozione viene evocata è il seguente passaggio del supplemento ideato per la riedizione, nel 1964, di [Göd47]:

Ma a dispetto della lontananza [degli oggetti della teoria degli insiemi] dall'esperienza sensoriale, possediamo qualcosa di simile ad una percezione anche degli oggetti della teoria degli insiemi, come si vede dal fatto che gli assiomi ci appaiono come principi veri. Non vedo ragioni per le quali dovremmo avere meno fiducia in questo tipo di percezione, cioè l'intuizione matematica, rispetto alla percezione sensoriale, che ci porta a costruire teorie fisiche e ad aspettarci che in futuro la percezione dei sensi sarà in accordo con esse, e a credere inoltre che questioni non decidibili al momento possiedano un significato e possano essere decise in futuro. [...]

Si dovrebbe notare che l'intuizione matematica non deve essere necessariamente concepita come una facoltà che fornisce una conoscenza *immediata* dell'oggetto a cui si riferisce. Piuttosto, sembra che, come nel caso dell'esperienza fisica, noi *formiamo* le nostre idee anche di quegli oggetti [della matematica] sulla base di qualcos'altro che è dato in modo immediato. Soltanto che questo qualcosa d'altro *non* è, o almeno non in modo primario, la sensazione. [...] Evidentemente ciò che è "dato" al di sotto della matematica è strettamente connesso con gli elementi astratti contenuti nelle nostre idee empiriche. Ciò non significa, tuttavia, che i dati di questo secondo tipo, dal momento che non possono essere associati con l'azione di certe cose sui nostri organi di senso, siano qualcosa di puramente soggettivo, come Kant ha asserito. Piuttosto, anch'essi possono rappresentare un aspetto della realtà oggettiva, ma, in opposizione alla sensazione, la loro presenza in noi può essere dovuta ad un altro tipo di relazione tra noi e la realtà. ([Göd64], pp. 268-268)

[Nota: il passo sembra giustificare il quesito sul rapporto tra il problema della conoscenza in matematica e quello della conoscenza in generale.]

Andrebbe tuttavia rivalutata a tal proposito la discussione di Gödel del problema dell'intuizione nei lavori dedicati alla all' 'Interpretazione Dialettica' ([Göd58], [Göd90b]).

Il problema può, ad una prima lettura, apparire completamente diverso: si tratta della questione del superamento del finitismo hilbertiano:

P. Bernays ha sottolineato in diverse occasioni che, dal momento che la consistenza di un sistema non può essere dimostrata mediante metodi di prova più deboli di quelli del sistema stesso, è necessario andare oltre il quadro di ciò che è, secondo Hilbert, la matematica finitaria se si vuole dimostrare la consistenza della matematica classica, o anche quella dell'aritmetica classica. Di conseguenza, dal momento che la matematica finitaria è definita come la matematica in cui l'evidenza poggia su ciò che è *intuitivo*, certe nozioni *astratte* sono necessarie per la consistenza dell'aritmetica [...]. ([Göd58], p. 240)

A questo Gödel aggiunge:

Qui, per nozioni astratte (o non intuitive) intendiamo quelle che sono essenzialmente del secondo ordine o di ordine superiore, cioè nozioni che non coinvolgono proprietà o relazioni di *oggetti concreti* (per esempio combinazioni di segni), ma che sono legate a *costrutti mentali* (ad esempio, prove, enunciati dotati di senso, e così via); e nelle dimostrazioni si fa uso di intuizioni, relative a questi costrutti mentali, che emergono non dalle proprietà combinatorie (spazio-temporali) delle combinazioni di simboli che rappresentano le dimostrazioni, ma solo dal loro *significato*. (*Ibid.*, p. 240)

È chiara la valenza anti-hilbertiana del passo: non solo perché le dimostrazioni di consistenza devono necessariamente chiamare in causa concetti *non riconducibili all'evidenza immediata*, ma anche in quanto le proprietà che le dimostrazioni di consistenza richiedono, poi, derivano *dall'analisi del significato* di questi concetti astratti.

È questo il caso (lampante) della prova di consistenza per l'aritmetica di Gerhard Gentzen (1936): il limite del ricorso all'intuizione relativa alle mere proprietà spatio-temporali delle dimostrazioni, intese come combinazioni di simboli di un alfabeto finitario, è rappresentato ovviamente dalla validità del principio di induzione fino all'ordinale ϵ_0 ; è in relazione a questo principio che "non si è più in grado di passare in rassegna le varie possibilità strutturali che si hanno per le successioni discendenti, e quindi non si è più in grado di riconoscere per mezzo dell'intuizione che ogni successione del genere termini necessariamente" (*Ibid.*, p. 242).

Il commento di Gödel al proposito è degno di attenzione:

In particolare, non si può acquisire una simile conoscenza [la fondatezza dell'ordinamento di tipo ϵ_0] *in modo intuitivo* passando un passo dopo l'altro da ordinali più piccoli a quelli più grandi; si può solo ottenere una conoscenza per via astratta per mezzo di nozioni di tipo superiore. Questo è possibile per mezzo della nozione astratta di 'accessibilità', che si definisce per il nostro essere in grado di dare una dimostrazione compresa informalmente del fatto che una certa inferenza è valida. (*Ibid.*, p. 242)

L'idea che ne emerge permette di dare un significato fondazionale alla concezione gödeliana della conoscenza matematica secondo lo schema proposto: la conoscenza dei concetti astratti (qui rappresentata dalla nozione di *accessibilità*), passa attraverso intuizioni relative al *significato* di certi 'costrutti mentali' e si 'manifesta' in modo essenziale nelle prove di consistenza (vs Hilbert).

[*Nota*: La posizione di Gödel dovrebbe essere tenuta di conto in relazione ai *due* scopi principali che il contributo sulla 'Dialectica' si propone, e cioè (i) offrire una dimostrazione (alternativa a quella di Gentzen) di consistenza dell'aritmetica classica (assunta la normalizzazione dei funzionali di tipo finito), che permetta quindi, come *ogni* dimostrazione di consistenza, di individuare il contributo informale dell'*accessibilità*, e, (ii), caratterizzare il contenuto costruttivo dell'approccio intuizionista delineando con maggior precisione il ruolo dell'*intuizione concreta*.]

4. L'analisi dei teoremi di incompletezza

Intanto: a quale risultato di indecidibilità Gödel fa riferimento?

Si tratta del seguente teorema:

Si consideri la classe A dei problemi della forma:

$$\bigwedge x_1, \dots, x_m \bigvee y_1, \dots, y_n F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0$$

dove F è un polinomio a coefficienti interi e $\bigwedge \dots \bigvee \dots$ un'abbreviazione per 'per ogni ... esistono ...'. Valgono:

1. *Non esiste una procedura meccanica di decisione per ogni enunciato della classe A.*
2. *In ogni sistema formale che permetta di esprimere tutte le proposizioni della classe A (e che sia corretto rispetto agli enunciati corrispondenti a problemi della classe A), ne esiste almeno una indecidibile.*

[Nota: Si tratta dunque di una versione dei risultati di incompletezza che permette di mettere in risalto il *significato matematico* della scoperta gödeliana, piuttosto evidenziarne la valenza fondazionale (ambito al quale il teorema originario appartiene). Ciò spiega la valenza che Gödel gli attribuisce parlando degli assiomi dell'infinito: essi consentono la decidibilità di problemi *matematici* altrimenti indecidibili, i quali, oltretutto, appartengono alla teoria basilari dei numeri (ossia all'ambito nel quale riteniamo di esercitare al massimo grado una qualche forma di *evidenza intuitiva*). Il ricorso ai concetti astratti è dunque essenziale anche per la conoscenza matematica al suo livello più immediato (come *percezione*).]

[Nota 2: La teoria delle equazioni diofantee di tipo Π_2^0 è dunque un limite per l'algoritmizzabilità della matematica, ossia per le 'capacità matematiche' di una macchina di Turing. Se si accetta il fatto che gli assiomi dell'infinito sono un *prodotto naturale* della progressiva 'familiarizzazione' con il concetto *iterativo* di insieme, si ricava, per questa via, un argomento che ci permette di concludere come la mente umana sia in grado di superare le capacità matematiche di una procedura effettiva di computo (e dunque un sostegno all'idea di una sua natura *non computazionale*).]

Idea della dimostrazione:

- Dal Teorema di Enumerazione di Kleene ([Kle36]), segue che, per ogni insieme ricorsivamente enumerabile D , esiste un $m \in N$ tale che:

$$x \in D \Leftrightarrow \bigvee y T_1(m, x, y) \quad (1)$$

dove T_1 è un predicato ricorsivo primitivo.

L'insieme $K := \{n \in N \mid \bigwedge y \neg T_1(n, n, y)\}$ non può essere ricorsivamente enumerabile (perchè se lo fosse allora, per (1), per qualche $k \in N$, si avrebbe $x \in K \Leftrightarrow \bigvee y T_1(k, x, y)$, da cui la contraddizione segue immediatamente per $x = k$).

Ciò implica che la classe di problemi $B := \{\bigvee y T_1(n, n, y) \mid n \in N\}$ non è decidibile, ossia vale per essa il teorema 1 enunciato in precedenza.

- Per ogni relazione primitiva ricorsiva $S(x_1, \dots, x_l)$ esiste un polinomio a coefficienti interi F con $m+n+l$ variabili tale che, per ogni $k_1, \dots, k_l \in N$:

$$S(k_1, \dots, k_l) \Leftrightarrow \bigwedge x_1, \dots, x_m \bigvee y_1, \dots, y_n F(k_1, \dots, k_l) = 0 \quad (2)$$

Data la relazione primitiva ricorsiva $S(x_1, \dots, x_l)$, consideriamone la funzione caratteristica f_S anch'essa ricorsiva primitiva e, dunque, computabile (nel senso della definizione Gödel-Herbrand). Sia dunque E_1, \dots, E_m il sistema di equazioni in ϕ_1, \dots, ϕ_k tale che, per ogni l -pla $\mathbf{n} \in N^l$ ⁴:

$$f_S(\mathbf{n}) = u \Leftrightarrow E_1, \dots, E_m \vdash \bar{u} = \phi_k(\bar{\mathbf{n}}) \quad (3)$$

Dalla definizione segue che, per ogni possibile scelta dell'argomento, solo un numero finito di valori noti di ognuna delle ϕ_j è necessario per calcolare il valore della f_S .

Questa osservazione equivale a considerare le ϕ_j definite solo in un certo dominio (quello nel quale cadono gli argomenti in corrispondenza dei

⁴Nel seguito si assumerà che le lettere m, n, \dots, u, v, \dots varino su elementi di N , e le corrispettive in grassetto $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ su successioni (di lunghezza appropriata) di numeri naturali. Stessa convenzione, vale per le variabili e per i numerali.

quali le funzioni assumono i valori che occorrono), e ciò fa sì osserva Gödel, che (3) possa essere equivalentemente espressa come:

$$f_S(\mathbf{n}) = u \Leftrightarrow \bigvee \phi_1, \dots, \phi_k \bigvee x_1, \dots, x_k \bigwedge \mathbf{y} \left. \begin{array}{l} [\mathbf{y} < x_1 \rightarrow E_1 \wedge \\ \mathbf{y} < x_2 \rightarrow E_2 \wedge \\ \quad \quad \quad \wedge \dots \wedge \\ \bar{\mathbf{n}} < x_k \wedge \bar{u} = \phi_k(\bar{\mathbf{n}}) \wedge \\ B_1 \wedge \dots \wedge B_r] \end{array} \right\} W(\phi_j, x_i, \mathbf{y}, \bar{\mathbf{n}})$$

dove le condizioni aggiuntive B_1, \dots, B_r , risultano essere necessarie nel caso in cui, tra le ϕ_j , vi sia qualche funzione, ad esempio ϕ_s , che sia definita in termini di qualche altra, sia essa, per limitarsi al caso più semplice, ϕ_p .

Se così fosse, si avrebbe allora, per qualche $1 \leq q \leq r$:

$$B_q \equiv \mathbf{y} < x_p \rightarrow \phi_s(\mathbf{y}) < a_s$$

che permette di esprimere come la conoscenza di ϕ_p nel suo dominio, sia una condizione sufficiente per calcolare la ϕ_s nel proprio.

Fissato allora un certo argomento \mathbf{n} della f_S , siano indicati con a_1, \dots, a_{r_j} le successioni dei valori delle ϕ_j in questione (cioè le funzioni occorrenti nel calcolo di $f_S(\mathbf{n})$), per ogni $1 \leq j \leq k$.

Mediante la tecnica già adottata da Gödel nei lavori precedenti, si dimostra, usando il Teorema Cinese del Resto, che è possibile codificare ognuna di queste successioni mediante la funzione $\beta(x, y, z)$ che calcola il valore del resto della divisione di x per $1 + (1 + z)y^5$.

Si dimostra cioè che esistono $c_j, d_j \in N$ tali che, per ogni $1 \leq i_j \leq r_j$ e $1 \leq j \leq k$:

$$a_{i_j} = \beta(c_j, d_j, i_j)$$

Segue dunque da (3) che:

$$f_S(\mathbf{n}) = u \Leftrightarrow \bigvee \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j, \mathbf{x}_j \bigwedge \mathbf{y} W(\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y}) \quad (4)$$

⁵Per una dimostrazione di questo fatto si veda, ad esempio, [Göd65a], p. 365.

dove $W(\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y})$ è una relazione costruita mediante le operazioni booleane a partire da uguaglianze e disuguaglianze contenenti le applicazioni della funzione β (eventualmente ‘annidate’, nel caso in cui qualcuna delle ϕ_j sia definita in termini di qualche altra funzione di quella stessa successione).

A questo punto si ricava immediatamente che vale:

$$f_S(\mathbf{n}) \neq u \Leftrightarrow \bigwedge \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j, \mathbf{x}_j \bigvee \mathbf{y} \overline{W}(\bar{\mathbf{n}}, \mathbf{c}_j, \mathbf{d}_j, \mathbf{x}_j, \mathbf{y})$$

da cui segue⁶ l’equivalenza di $S(\mathbf{n})$ con un’espressione che possiede intanto un prefisso della forma desiderata.

Per ottenere il risultato voluto, basta quindi osservare che la matrice può essere trasformata spostando il complemento lungo W secondo le opportune leggi per le operazioni booleane ed eliminando le conseguenti disuguaglianze, disequazioni e occorrenze ‘annidate’ della β mediante le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} x \neq 0 &\Leftrightarrow \bigvee y(x = y + 1) \\ x \leq y &\Leftrightarrow \bigvee z(y = x + z) \\ x = \beta(c, d, \beta(c', d', i)) &\Leftrightarrow \bigvee y(x = \beta(c, d, y) \wedge y = \beta(c', d', i)) \end{aligned}$$

L’equivalenza di (2) può essere quindi ottenuta dall’espressione risultante, utilizzando le seguenti corrispondenze:

$$\begin{aligned} A = 0 \wedge B = 0 &\Leftrightarrow A \times B = 0 \\ A = 0 \vee B = 0 &\Leftrightarrow A^2 + B^2 = 0 \end{aligned}$$

e riducendo infine alla forma prenessa.

⁶Ovviamente per il fatto che $S(\mathbf{n}) \Leftrightarrow f_S(\mathbf{n}) \neq 1$.

- Quel risultato implica l'esistenza di un opportuno polinomio G tale che:

$$\bar{T}_1(x, x, z) \Leftrightarrow \bigwedge x_1, \dots, x_m \bigvee y_1, \dots, y_n G(x, z) = 0$$

che permette di stabilire una corrispondenza tra i problemi appartenenti al complemento della classe B su indicata e gli elementi della classe A a cui si riferisce l'enunciato del teorema 1, e di far quindi seguire l'indecidibilità di quest'ultima dalla non ricorsività di B .

[*Nota:* al complemento di B appartengono le relazioni alle quali corrispondono gli usuali enunciati indecidibili di Gödel. Da questo fatto se ne ricava dunque l'esistenza di certi loro equivalenti logici (corrispondenti a relazioni appartenenti alla classe A).]

- Il teorema 2 segue dall'osservazione banale che se esistesse un sistema formale corretto e sintatticamente completo rispetto alla classe A , avremmo anche, contrariamente a quanto appena dimostrato, una procedura meccanica di decisione per essa (ossia la macchina di Turing che enumera l'insieme dei teoremi del sistema in questione).

Bibliografia

- [Dav65] Martin Davis (ed.), *The undecidable*, Raven Press, 1965.
- [Göd40] Kurt Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton University Press, 1940, ristampato in [Göd90a], pp. 33–101.
- [Göd44] Kurt Gödel, *Russell's mathematical logic*, The Philosophy of Bertrand Russell (Paul Arthur Schilpp, ed.), Northwestern University Press, 1944, ristampato in [Göd90a], pp. 119–141, pp. 123–153.
- [Göd47] ———, *What is Cantor's continuum problem?*, American Mathematical Monthly **54** (1947), 515–525, ristampato in [Göd90a], pp. 230–259.
- [Göd51] ———, *Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications*, edito in [Göd95], pp. 304–323, 1951.
- [Göd58] ———, *Über ein bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes*, Dialectica **12** (1958), 280–287, ristampato e tradotto in inglese in [Göd90a], pp. 208–216.
- [Göd64] ———, *What is Cantor's continuum problem?*, Philosophy of Mathematics: Selected Readings (Paul Benacerraff and Hilary Putnam, eds.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964, ristampato in [Göd90a], pp. 150–153.
- [Göd65a] ———, *On undecidable propositions of formal mathematical systems*, The Undecidable, Raven Press, 1965, ristampato in [Göd86], pp. 346–371.

- [Göd65b] ———, *Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems of mathematics*, The Undecidable (Martin Davis, ed.), Raven Press, 1965, ristampato in [Göd90a], pp. 150–153, pp. 84–88.
- [Göd86] ———, *Collected works vol. I: Publications 1929-1936*, Oxford University Press, 1986.
- [Göd90a] ———, *Collected works vol. II: Publications 1938-1974*, Oxford University Press, 1990.
- [Göd90b] ———, *On an extension of finitary mathematics which has not yet been used*, in [Göd90a], pp. 271–280, 1990.
- [Göd90c] ———, *Some remarks on the undecidability results*, in [Göd90a], pp. 305–306, 1990.
- [Göd95] ———, *Collected works vol. III: Unpublished essays and lectures*, Oxford University Press, 1995.
- [Kle36] Stephen Cole Kleene, *General recursive functions of natural numbers*, *Mathematische Annalen* **112** (1936), 727–742.
- [Tur36] Alan Mathison Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, *Proceedings of the London Mathematical Society* (2) **42** (1936), 230–265, ristampato in [Dav65], pp. 116-154.
- [Wan74] Hao Wang (ed.), *From mathematics to philosophy*, Routledge and Kegan Paul, 1974.