

LOGICA TRIVALENTE E MODALITA' ALETICHE:

LA PROPOSTA DI ŁUKASIEWICZ

Alessandro Becchi
Dottore di Ricerca in Filosofia
Università degli Studi di Firenze
notung@unifi.it

TESI: è possibile fornire una interpretazione *modale* adeguata (rispetto a certe nostre intuizioni) della logica a tre valori elaborata da Łukasiewicz solo se essa viene collocata all'interno della problematica originaria da cui è emersa, ossia la questione del valore logico degli enunciati al futuro.

➤ Łukasiewicz [1930]: *Osservazioni filosofiche sui sistemi polivalenti del calcolo proposizionale.*

- (1) La semantica bivalente non è conciliabile con le intuizioni fondamentali che soggiacciono ai concetti modali di 'possibile', 'impossibile', 'necessario', ecc.
- (2) In particolare, all'interno del quadro logico bivalente non vi è spazio per la *contingenza*; ciò ci costringe ad abbandonare o l'idea che vi siano fatti contingenti ("determinismo") oppure il principio di bivalenza.
- (3) L'introduzione di un terzo valore logico (l'indeterminato) accanto al vero e al falso ci consente di definire un operatore *verofunzionale* di possibilità e di elaborare un sistema modale estensionale in cui risultano verificati i principi modali accettati intuitivamente come validi dalla tradizione logico-filosofica.

~Logica bivalente e modalità alétiche~

Il sistema trivalente del calcolo proposizionale deve la sua origine ad alcune ricerche da me compiute riguardo alle cosiddette «proposizioni modali» e ai concetti con esse strettamente connessi di possibilità e necessità. (Łukasiewicz)

- Vi sono almeno tre (gruppi di) principi modali che sono rappresentativi della tradizione logico-filosofica:

(a) *Ab oportere ad esse valet consequentia.*

(b) *Unumquodque, quando est, oportet esse.*

(c) Per un certo p: è possibile che p ed è possibile che non-p.

(a) accezione ontologica di necessità; (b) necessità “temporale” o *ex-hypothesi* [necessità come assenza di alternative]; (c) possibilità “bilaterale” o contingenza.

Supponiamo di avere un operatore proposizionale monadico ‘M’ (*möglich*); i principi (a) – (c) possono essere resi come segue nel linguaggio della logica proposizionale bivalente (estesa):

(a) $\neg M\neg p \rightarrow p$

(b) $p \rightarrow \neg M\neg p$ *

(c) $\exists p (Mp \wedge M\neg p)$

(*) Nel quadro bivalente questo è l’unico modo di esprimere il principio modale (b), a causa della validità classica della “legge di contrazione”: $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$.

PROBLEMI:

1. Non esiste (nel quadro bivalente) nessun operatore proposizionale monadico in grado di soddisfare *tutti* i principi (a) – (c);
2. I principi (a) e (b) unitamente presi danno luogo ad un “collasso modale” [vero = necessario];
3. Dal principio (c) è derivabile logicamente la proposizione Mp [tutto è possibile – niente è impossibile o necessario].
4. Dalla congiunzione di (b) e (c) è derivabile la proposizione (qualsiasi) p [inconsistenza del sistema].

>>> Dimostrazione di 1 – 4: Łukasiewicz [1930].

➤ **CONCLUSIONE: il quadro logico bivalente non ammette una trattazione (estensionale) delle nozioni modali espresse dai principi classici (a) – (c).**

Si ha infatti l'impressione che le nostre intuizioni connesse con i concetti di possibilità e di necessità facciano riferimento a un sistema logico che è fondamentalmente diverso dalla logica ordinaria basata sulla legge di bivalenza. (Łukasiewicz)

* * * * *

~Logica bivalente e determinismo~

Posso assumere senza contraddizione che la mia presenza a Varsavia a un certo istante del prossimo anno, per esempio a mezzogiorno del 21 dicembre, non sia in questo momento decisa né in senso positivo, né in senso negativo. Quindi è *possibile* ma *non necessario* che io sarò presente a Varsavia in quel dato momento. Sotto questa ipotesi la proposizione «sarò a Varsavia a mezzogiorno del 21 dicembre dell'anno prossimo» non può essere oggi né vera né falsa. Infatti, se fosse vera oggi, la mia futura presenza a Varsavia dovrebbe essere necessaria, il che è in contraddizione con l'ipotesi. Se, d'altra parte, essa fosse oggi falsa, la mia presenza futura a Varsavia dovrebbe essere impossibile, il che pure è in contraddizione con l'assunzione. Quindi la proposizione considerata non è oggi *né vera né falsa* e deve possedere un terzo valore, diverso da '0' o falsità e da '1' o verità. Possiamo denotare questo valore con '½'. Esso è proprio 'il possibile', che si affianca al 'vero' e al 'falso' come terzo valore. [...] Il sistema trivalente della logica proposizionale deve la sua origine a questa linea di pensiero. (Łukasiewicz)

- ✓ “Salto” dalla verità (rispettivamente, falsità) attuale di una data proposizione sul futuro alla necessità (rispettivamente, impossibilità) del fatto da essa espresso.
- ✓ Utilizzo surrettizio nell'argomentazione della “necessità temporale” (b): *Unumquodque, quando est, oportet esse*: se p è vera adesso, quanto espresso da p non può non accadere.

Tentativo di ricostruzione dell'argomento:

1) $\exists p (Mp \wedge M\neg p)$ [evidenza + "credo" indeterministico]

2) $\forall p (p \vee \neg p)$ [bivalenza]

3) $p \rightarrow \neg M\neg p$ [necessità *ex-hypothesi*]

4) $\neg p \rightarrow \neg Mp$ [necessità *ex-hypothesi*]

[D] $\forall p (\neg Mp \vee \neg M\neg p)$ [da 2,3,4]

➤ Ma [D] afferma, contrariamente all'ipotesi (1), di cui è la negazione, che ogni proposizione è o impossibile o necessaria; ossia, che nessuna proposizione è contingente: >>> **DETERMINISMO**.

➤ PROPOSTA di Łukasiewicz:

- abbandonare il principio di bivalenza (2);
- introdurre un terzo valore logico (l'indeterminato);
- fornire una definizione dell'operatore 'M' che consenta di verificare l'ipotesi di contingenza (1), sulla base di una semantica trivalente.

* * * * *

~Semantica trivalente e modalità alétiche~

- Semantica del calcolo proposizionale trivalente: Łukasiewicz [1920].

[Negazione: $\neg \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; + casi classici;

Implicazione: $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 1 = 1$; $\frac{1}{2} \rightarrow 0 = 1 \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; + casi classici.]

- Definizione di un operatore verofunzionale di possibilità (>>>Tarski):

$$\mathbf{Mp} = \neg p \rightarrow p$$

IDEA: Questo solo è certo: se una proposizione *può* essere inferita dalla sua contraddittoria, è certamente non falsa, quindi neppure impossibile. È appunto *possibile* [o vera, nel caso di L_2], come stabilisce la definizione di Tarski. (Łukasiewicz, inciso mio.)

Tale definizione permette di *distinguere*, all'interno del quadro logico trivalente (L_3), le varie modalità alétiche, cosa che non è possibile all'interno del quadro logico bivalente (L_2).

- **POSSIBILITA':**

In L_2 vale: $p \leftrightarrow \mathbf{Mp}$, ossia, $p \leftrightarrow (\neg p \rightarrow p)$.

[non si può operare una distinzione tra la verità di p e la sua possibilità]

In L_3 vale: $p \rightarrow \mathbf{Mp}$, ma **non vale**: $\mathbf{Mp} \rightarrow p$ [per $p = \frac{1}{2}$]

[la verità di una proposizione e la sua possibilità sono dunque distinte]

- NOTA: ciò equivale alla non validità in \mathcal{L}_3 della legge classica detta **consequentia mirabilis**: $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$. Tuttavia in \mathcal{L}_3 vale qualcosa di analogo a tale legge, ossia: $(M\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$; che nella forma non abbreviata: $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow p) \rightarrow p$ costituisce il 4° assioma di Wajsberg.

[>>> analogamente per quanto riguarda il rapporto tra $\neg p$ e $M\neg p$].

- **NECESSITA'**: $Np = \neg M\neg p = \neg(p \rightarrow \neg p)^*$

In \mathcal{L}_2 vale: $p \leftrightarrow Np$, ossia, $p \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$.

[non si può operare una distinzione tra la verità di p e la sua necessità]

In \mathcal{L}_3 vale: $Np \rightarrow p$, ma **non vale**: $p \rightarrow Np$ [per $p=1/2$]

[la verità di una proposizione e la sua necessità sono dunque distinte]

(*) **Lettura intuitiva**: una proposizione p è necessaria quando non “contiene” (non implica) la propria negazione.

- **IMPOSSIBILITA'**: $Ip = \neg Mp = \neg(\neg p \rightarrow p)$

In \mathcal{L}_2 vale: $\neg p \leftrightarrow Ip$, ossia, $\neg p \leftrightarrow \neg(\neg p \rightarrow p)$.

[non si può operare una distinzione tra la falsità di p e la sua impossibilità]

In \mathcal{L}_3 vale: $Ip \rightarrow \neg p$, ma **non vale**: $\neg p \rightarrow Ip$ [per $p=1/2$]

[la falsità di una proposizione e la sua impossibilità sono dunque distinte]

□ **RIASSUMENDO:**

Sulla base della definizione di Mp come $\neg p \rightarrow p$, risulta che in L_2 risultano verificate le equivalenze seguenti:

$$(1) Mp \leftrightarrow p \leftrightarrow Np$$

$$(2) M\neg p \leftrightarrow \neg p \leftrightarrow Ip$$

>>> COLLASSO MODALE !

Diversamente, in L_3 risultano verificate le leggi modali (intuitivamente chiare):

$$(1) p \rightarrow Mp$$

$$(2) \neg p \rightarrow M\neg p$$

$$(3) Np \rightarrow p$$

$$(4) Ip \rightarrow \neg p$$

ma **non** il converso di tali leggi. Inoltre:

- ✓ Il principio modale (a) ***Ab oportere ad esse valet consequentia*** risulta dunque verificato in L_3 nella forma (3).
- ✓ Il principio modale (b) ***Unumquodque, quando est, oportet esse*** risulta verificato in L_3 **non** nella forma: $p \rightarrow Np$, bensì nella forma (più aderente alla formulazione latina): $p \rightarrow (p \rightarrow Np)$, grazie alla non validità in L_3 della “legge di contrazione” $(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ [per $\alpha=0$, $\beta=1/2$]

- ✓ Il principio modale (c) relativo alla “**possibilità bilaterale**” o **contingenza** risulta verificato in \mathcal{L}_3 nella forma $\exists p (Mp \wedge M\neg p)$, per $p=1/2$.

[infatti per $p = 1/2$ abbiamo: $(M1/2 \wedge M\neg 1/2) = (\neg 1/2 \rightarrow 1/2) \wedge (1/2 \rightarrow \neg 1/2) = (1/2 \rightarrow 1/2) \wedge (1/2 \rightarrow 1/2) = 1 \wedge 1 = 1$]

* * * * *

~Le modalità di \mathcal{L}_3 ~

- **PROBLEMI** con la definizione verofunzionale di “possibilità”:

A. Se $p=0$, allora $Ip=1$; infatti abbiamo: $\neg(\neg p \rightarrow p) = \neg(1 \rightarrow 0) = 1$.

[>>> se p è di fatto falsa allora p è impossibile]

B. Se $p=1$, allora $Np=1$; infatti abbiamo: $\neg(p \rightarrow \neg p) = \neg(1 \rightarrow 0) = \neg 0 = 1$.

[>>> se p è di fatto vera allora p è necessaria]

C. Da A + B segue immediatamente che la verità / falsità di fatto di una qualunque proposizione ne esclude la contingenza. Infatti se $p=1$ oppure $p=0$, abbiamo che la proposizione: $Mp \wedge M\neg p$ (che esprime la contingenza di p) risulta **falsa**.

□ In che modo si può dare conto dei fatti A – C?

➤ Collocando il sistema di logica modale \mathcal{L}_3 all'interno della cornice concettuale in cui fu elaborato, ossia mettendolo in relazione al problema originario che Łukasiewicz si proponeva di affrontare e risolvere: quello del valore degli enunciati che esprimono fatti futuri contingenti.

□ **PROBLEMA DEI “FUTURI CONTINGENTI”**: in che misura è possibile sostenere al tempo stesso (1) una certa indeterminatezza ontologica riguardo a certi fatti futuri e (2) la validità universale del principio di bivalenza? [**tensione** tra 1 e 2]

>>> lunghissima storia del problema / dibattito: Aristotele, Stoici (Crisippo), Epicurei, Accademici, (...); “Scuola Polacca” (Kotarbiński, Łukasiewicz, Leśniewski)

La disputa intorno alla legge di bivalenza ha uno sfondo metafisico: i suoi difensori erano decisi deterministi, mentre i suoi oppositori propendevano per una *Weltanschauung* indeterministica. Con ciò siamo ritornati ancora una volta nell’ambito dei concetti di possibilità e necessità. (Łukasiewicz)

□ **La posizione di Łukasiewicz:**

✓ vi sono **fatti futuri attualmente indeterminati**, ossia fatti in relazione ai quali sussiste al momento presente una alternativa reale, di carattere **ontologico** (non meramente epistemico).

✓ Gli **enunciati** che esprimono tali fatti risultano al momento attuale **indeterminati (possibili)**, poiché non vi è niente che all’istante presente renda veri tali enunciati oppure che li renda falsi (renda vere le loro negazioni). [**>>>truth-maker**]

- In questo contesto, **la contrapposizione fondamentale** concerne:
- (1) ciò che attualmente risulta (ancora) indeterminato e ha sia la possibilità di accadere che quella di non accadere;
 - (2) ciò che attualmente risulta (già) deciso, determinato (sia in senso “positivo” che “negativo”), e non ha perciò alcuna possibilità di accadere o non accadere diversamente.
- ❖ **La logica L_3 intende dare conto di questa contrapposizione, che rispecchia i diversi modi in cui un evento può presentarsi nella realtà.**

Alla luce di ciò risulta più facile comprendere in che senso la **verità** di una data proposizione implica la sua **necessità**: ciò significa, semplicemente, che ciò che viene espresso da tale proposizione (sia esso un fatto passato, presente o futuro) non è aperto a possibilità alternative, bensì è deciso, determinato, quanto al suo accadere.

[Analogamente per il rapporto tra **falsità** e **impossibilità**.]

>>> verità e falsità indicano chiusura rispetto a possibilità alternative; in questo senso esse implicano (rispettivamente) necessità ed impossibilità.

[N.B. ciò non ha niente a che fare con un “collasso modale”!!!]

La circostanza che **$p=1$** implica **$Np=1$** non significa che **p** e **Np** sono tra loro logicamente equivalenti! *Idem* per **$\neg p$** e **Ip** . Vedi sopra (...)]

✓ Prior [1953]: *Three-valued logic and future contingents*.

Il valore '1', naturalmente, chiaramente, appartiene ad asserzioni che sono vere in modo definitivo, o perché esse si riferiscono a relazioni atemporali (es. '2+2=4'), o perché ciò di cui esse parlano è già accaduto o il suo accadere è già deciso; il valore '0' appartiene ad asserzioni che sono false in modo definitivo per ragioni analoghe; e il valore '½' ad asserzioni riguardanti il futuro indeterminato. Data questa interpretazione [dei tre valori logici] vi è un senso chiaro in cui ciò che è definitivamente falso è sempre impossibile e ciò che è definitivamente vero è sempre necessario. Poiché abbiamo una verità definitiva e una falsità definitiva solo quando la possibilità di accadere in un modo o nell'altro da parte di un qualche evento futuro risulta per una ragione o l'altra assente. [trad. mia]

➤ Risulta chiaro da tutto ciò che le modalità di cui si occupa Łukasiewicz in questo contesto non coincidono con le modalità logiche che usualmente vengono indicate con i simboli '□' (*box*) e '◇' (*diamond*).

➤ Tali modalità stanno infatti ad indicare delle proprietà di "livello superiore" possedute da certe funzioni enunciative (e *non sono* esse stesse delle funzioni enunciative); ad esempio, scrivendo:

$$\Box(p \rightarrow p)$$

intendiamo asserire che la funzione enunciativa $p \rightarrow p$ è *vera per ogni interpretazione della variabile p*, oppure che essa è *derivabile da certi assiomi logici*.

- Diversamente, nel sistema L_3 le **modalità** vengono intese come **diversi modi di esistenza dei fatti** (non come proprietà di funzioni enunciative). E le **proposizioni modali** sono esse stesse **funzioni enunciative** (a differenza di quanto accade nei sistemi modali intensionali).

