I fondamenti della matematica dopo i teoremi di incompletezza: K. Gödel, S. Feferman

di Riccardo Bruni e Marco Galvagni[*]

1. *Filosofia e fondamenti della matematica*

1.1 Introduzione

Nel corso dell'Ottocento, sulla scia della nascita delle geometrie non euclidee da un lato e della teoria degli insiemi dall'altro, si è venuta a creare la necessità di una discussione critica dei presupposti ultimi delle scienze matematiche. Tradizionalmente si suole indicare in questo processo la ‘crisi dei fondamenti della matematica’.[1] L'elemento che fa delle ricerche fondazionali un qualcosa di assolutamente inedito nella storia del pensiero occidentale, sembra essere stato il connubio tra l'uso di metodi e tecniche tipicamente matematiche e posizioni di fondo riconducibili ad approcci filosofici tradizionali. Si è avuto così, da un lato, il costituirsi della logica matematica come disciplina autonoma, dall'altro il rinnovarsi di istanze filosofiche ben note, ad esempio nella teorie del significato, quali il *concettualismo*, il *nominalismo* ed il *platonismo* (o *realismo concettuale*).

Lo scopo di questa sezione introduttiva non vuole essere quello di esaurire l'ampio tema dei fondamenti della matematica, bensì quello di accennare a particolari tratti che si dovrebbero rivelare utili nella lettura delle due sezioni successive[2]. A tal fine, cercheremo di caratterizzare schematicamente tre posizioni standard in filosofia della

---

[*] La prima sezione del presente articolo: *Filosofia e fondamenti della matematica* è stata stessa a quattro mani da Bruni e Galvagni; la seconda e la terza sezione: *Platonismo e costruttivismo nell'opera di Kurt Gödel*, e *Salomon Feferman: ‘il programma di Hilbert relativizzato’*, da Galvagni, e rispettivamente da Bruni.

[1] Distingueremo allora fra un *fondazionalismo* in senso stretto in riferimento alle indagini condotte cronologicamente da questo momento in poi, da quegli studi sui principi primi delle matematiche che rimandano a questioni teoretiche più generali legate alle origini stesse della disciplina.

[2] Una bibliografia minimale per chi volesse approfondire l'argomento dovrebbe contenere, innanzi tutto, un testo di storia della matematica (per una panoramica complessiva, si può vedere, ad esempio, il volume di C. B. Boyer, *Storia della Matematica*, Milano, Mondadori, 1990); come testi di analisi, commento e introduzione di maggior spessore teoretico alle problematiche dei fondamenti si possono prendere in considerazione i seguenti: A. Cantini, *I Fondamenti della Matematica, da Dedekind a Tarski,* Torino, Loescher, 1979, E. Casari, *Questioni di Filosofia della Matematica*, Milano, Feltrinelli, 1972, e, dello stesso autore, *La Filosofia della Matematica del '900*, Firenze, Sansoni, 1973.

matematica facendo riferimento a tre autorevoli matematici che le rappresentano: Cantor, Brouwer, e Hilbert.

1.2 Cantor e il platonisimo

Come si è accennato in precedenza la teoria degli insieme riveste un ruolo centrale per la riflessione sui fondamenti. Il nome a cui questa teoria è indissolubilmente legata è quello del matematico russo[3] Georg Cantor. È con lui che si affacciano in modo rilevante, tanto la questione circa lo statuto ontologico degli enti matematici, quanto lo stretto rapporto di esso con il concetto di infinito.

Una delle implicazioni più rivoluzionarie e sconcertanti della teoria cantoriana degli insiemi consiste, infatti, nel fare riferimento a totalità infinite di oggetti (ad esempio numeri) date *attualmente*, ovvero compiute, e non meramente in potenza. La nozione di infinito attuale è anzi condizione necessaria della possibilità di una teoria della generazione dei numeri. Secondo Cantor, infatti, alla base di questa stanno tre principi. In primo luogo vi è la possibilità di aggiungere un'unità ad un numero già dato (primo principio generatore), ottenendo in tal modo una totalità infinita priva di massimo (si pensi alla classe dei numeri naturali). Si può immaginare allora il più piccolo numero *maggiore di tutti gli elementi di quella totalità*, un elemento *limite* (secondo principio generatore). Applicando a questo nuovo elemento il primo principio generatore otteniamo una nuova successione infinita al termine della quale, per il secondo principio, collocare il limite di questa. Si può così procedere in maniera indefinita alla produzione di successioni numeriche infinite numerabili (con lo stesso numero di elementi della classe dei numeri naturali). Il terzo ed ultimo principio di generazione (detto *principio della limitazione* o *dell'arresto*) consiste allora nella possibilità di immaginare il maggiore dei limiti di *tutte le successioni ottenute mediante il primo ed il secondo principio*.[4]

Come si sarà notato, nel caso del primo e del secondo principio, si fa uso essenziale del presupposto che una totalità infinita possa essere concepita come interamente determinata e cioè come attualmente data. Lo sfondo filosofico che rende sostenibile l'ontologia alla base di questa concezione consiste nel pensare agli oggetti matematici come ad una realtà separata, esistente indipendentemente dal soggetto conoscente che può soltanto scoprirne le proprietà. Le evidenti affinità con la teoria platonica delle idee ha portato all'uso del termine *platonismo* per denotare questa posizione.

---

[3] Cantor era infatti nato a Pietroburgo nel 1845 da genitori danesi. Per la precisione occorre però aggiungere che la sua formazione e la sua attività furono del tutto spese in Germania, a tal punto che non è inconsueto trovarlo citato come matematico tedesco.

[4] Ciò consente di pensare alla totalità di numeri ottenuta mediante i soli due principi come ad una nuova classe numerica (in quanto compiuta) che si aggiunge a quella dei numeri naturali.

1.3 Brouwer e il costruttivismo

Proprio in contrapposizione alle forti implicazioni ontologiche della teoria cantoriana degli insiemi, si pone la filosofia di matrice concettualista di Luitzen Egbertus Jan Brouwer che costituisce una delle forme meglio note di costruttivismo in matematica. Il punto di partenza della corrente che a Brouwer guarda come al proprio padre fondatore, risiede nell'affidare alla facoltà (umana) dell'*intuizione* la fonte e il fondamento del concetto di numero naturale. Questo riferimento all'intuizione, da cui l'appellativo di *intuizionismo*, sta ad indicare il ruolo creativo e costruttivo che qui gioca il soggetto conoscente (idealizzato o trascendentale in senso kantiano) rispetto agli enti matematici.

«Questo [intuizionismo] considera lo scindersi di momenti di vita in parti qualitativamente differenti che vengono riunite solo in quanto rimangono separate, come il fenomeno fondamentale dell'intelletto umano che trapassa mediante l'astrazione dal suo contenuto emozionale nel fenomeno fondamentale del pensiero matematico, l'intuizione della duo-unità.»[5]

È a partire dalla forma pura a priori del tempo e dall'intuizione che il soggetto (trascendentale) ne ha[6] che quest'ultimo può costruire non solo tutti i numeri naturali ma anche quegli elementi transfiniti che l'intuizionismo ammette. Laddove Cantor ammetteva tre principi generatori, Brouwer ne ammette soltanto uno: il principio della duo-unità[7].

L'elemento epistemologico specifico, il ruolo creativo del soggetto conoscente, si riflette nel rifiuto dell'infinito attuale come concetto matematico dotato di senso, e nell'ammissione dell'infinito solo in quanto potenzialmente dato. La ricaduta logica di questo assunto risiede nella celebre critica del principio del ‘terzo escluso’ secondo il quale, o tutti gli elementi di una totalità godono di una certa proprietà, oppure ne esiste almeno uno che non ne gode. Gli intuizionisti, infatti, ne ritengono inaccettabile l'applicazione su domini infiniti, dei quali si dà sempre e soltanto una conoscenza parziale.

---

[5] L. E. J. Brouwer, *Intuitionism and Formalism*, in «Bull. of the Am. Math. Soc.», 20 (1912); trad. it. in A. Cantini , Op. cit., p. 167.

[6] La discussione sulla teoria kantiana delle forme pure a priori della sensibilità (spazio e tempo) si era riaperta nella prima metà dell'Ottocento con la scoperta delle geometrie non euclidee. Di fatto veniva così fortemente criticata l'apriorità della forma dello spazio che nell'estetica trascendentale viene individuata nella geometria euclidea. Il recupero di Brouwer della filosofia kantiana, allora, sembrava tenere nella giusta considerazione questa debolezza.

[7] Con questa espressione ci si riferisce al fatto che con la forma del tempo si intendeva dar conto tanto della continuità dei sistemi numerici (si pensi ai numeri reali), che della discretezza.

1.4 Hilbert e il finitismo

Tradizionalmente si guarda alla filosofia elaborata dal matematico tedesco David Hilbert nel corso dei primi quarant'anni del Novecento, come ad una soluzione di compromesso fra i due ‘estremismi filosofici’ di segno opposto del platonismo e dell'intuizionismo. Si cita spesso al riguardo la volontà hilbertiana di mantenere ad un tempo la forza della teoria degli insiemi e la certezza indiscutibile dei metodi propri della matematica. Così si spiega il rifiuto di giustificare il corpus delle conoscenze matematiche mediante discutibili assunzioni ontologiche o anche semplicemente filosofiche.

Già a partire dalla fine dell'Ottocento si era introdotto il ricorso sistematico all'uso del linguaggio formale per la matematica entro contesti assiomatici.[8] È con la figura di Hilbert che questa prassi viene rivestita di un ruolo essenziale per la problematica dei fondamenti. L'idea hilbertiana è quella di ricondurre l'infinità (attuale) e l'astrattezza delle conoscenze matematiche superiori (ad esempio della teoria degli insiemi) alla finitezza e concretezza proprie dei sistemi formali.[9] Dunque, si presuppone che per ogni porzione della matematica si debba individuarne la controparte formale. Quest'ultima dovrà soddisfare alcuni criteri di adeguatezza.[10] Secondo Hilbert, innanzi tutto occorre assicurare che un sistema formale si riveli (sintatticamente) completo rispetto al proprio linguaggio: data una qualsiasi formula ben formata, questa deve risultare dimostrabile oppure refutabile (ovvero che sia dimostrabile la sua negazione) nel sistema. In secondo luogo, un insieme di assiomi deve rispettare un criterio minimale di sostenibilità individuato nella sua *consistenza*, esprimibile con il requisito che non sia derivabile una contraddizione (come 0=1[11]). La soluzione del problema dei fondamenti, nota come «programma di Hilbert», consiste nel giustificare porzioni di matematica ideale (quella astratta, infinitaria e in qualche modo problematica) attraverso la prova della consistenza dei corrispettivi sistemi formali, *con l'uso dei soli strumenti della matematica reale* (concreta e finitaria), come l'aritmetica elementare.

[8] Infatti, è proprio a cavallo fra Ottocento e Novecento che compaiono le prime assiomatizzazioni formalizzate di porzioni rilevanti della matematica che diverranno poi note come *sistemi formali*.

[9] Si potrebbe pensare che ciò faccia della filosofia di Hilbert una forma cristallina di nominalismo. Un esame più attento di alcuni suoi scritti comporta per lo meno il dubbio che così non sia. Sembrerebbe infatti che anche Hilbert ammetta un contenuto a priori come base della conoscenza matematica (avvicinandosi dunque ad una qualche forma di intuizionismo). Resta tuttavia il fatto che in numerosi luoghi (perfino in quegli stessi scritti in cui si intravede una certa vicinanza col kantismo) la forma della rappresentazione degli oggetti matematici è data dai segni concreti *empiricamente* percepibili.

[10] Utilizziamo qui quest'espressione in modo del tutto informale, senza alcun riferimento alle proprietà logiche di completezza e validità semantiche.

[11] La definizione rigorosa di consistenza, logicamente equivalente a quella data, è in realtà la seguente: esiste almeno una formula che il sistema formale non dimostra.

Usualmente si ritiene che i celebri teoremi di Gödel sanciscano il fallimento della prospettiva hilbertiana in quanto l'uno, il primo, afferma che ogni sistema formale che soddisfi certi criteri minimi di ‘forza’ matematica, non può essere completo (c'è sempre una formula *vera* che non è in esso *dimostrabile*); l'altro, il secondo, che tra le formule che sistemi siffatti non possono dimostrare vi è in particolare quella che esprime la propria consistenza. Diviene così irrealizzabile l’idea hilbertiana seconda la quale una certa porzione di matematica è ben fondata se il sistema formale corrispondente (chiamiamolo *SF*) è in grado di dimostrare, rispettivamente, gli enunciati «SF è completo», e «SF è consistente», sfruttando la sola aritmetica elementare.

2. Platonismo e costruttivismo nell'opera di Kurt Gödel.

Il nome di Kurt Gödel è noto ai filosofi principalmente per due motivi: i teoremi di incompletezza e il platonismo che caratterizza la sua filosofia della matematica. Come s'è visto nella prima sezione di questo articolo, i teoremi di incompletezza hanno segnato una svolta in logica matematica e nel fondazionalismo, dal momento che hanno sancito il fallimento del programma di Hilbert. D'altro canto il platonismo in filosofia della matematica che Gödel professò a partire dal 1944 è stato utilizzato per fare del matematico moravo il baluardo del realismo in matematica nel Novecento. Si sostiene cioè[12] che Gödel fu filosoficamente orientato in senso platonista fin dagli anni in cui frequentava l'università a Vienna (cioè a partire dal 1925) e si cerca perciò di ricondurre i teoremi di incompletezza ad un'impostazione concettuale realista.

Di fatto le basi filologiche su cui si fonda questa immagine del grande logico risalgono a due importanti articoli degli anni Quaranta nei quali si può leggere:[13]

«Classi e concetti possono essere concepiti come *oggetti reali*»[14]

e, ancora:

«Per chi ritiene che gli oggetti matematici esistano indipendentemente dalle nostre costruzioni [...] esiste, io penso, una fondazione soddisfacente per la teoria degli insiemi di Cantor...».[15]

---

[12] Si veda ad esempio Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, London, Routledge and Keagan Paul, 1974.

[13] Vedi K. Gödel, *Russell’s mathematical logic* in *Collected Works*. V*ol. II: Publications 1938-1974*, (a cura di) Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Stephen C. Kleene, Gregory H. Moore, Robert M. Solovay e Jan van Heijenoort, New York e Oxford, Oxford U. P., 1990, pp. 123-153.

[14] K. Gödel, op. cit., p. 128, «Classes and concepts may [...] be conceived as real objects [...]».

[15] K. Gödel, *What is Cantor’s continuum problem*, p. 258 in K. Gödel, op. cit., pag. 254-260 «For someone who considers mathematical objects to exist indipendently of our constructions [...] there exist, I believe, a satisfactory foundation of Cantor's set theory...».

Nelle poche pagine della presente sezione cercheremo di mostrare che entrambe le immagini sopra schizzate di un Gödel completamente anti-hilbertiano e da sempre platonista non corrispondono in tutto e per tutto alla realtà storica. Riteniamo infatti che in entrambi i casi sia stata fatta una semplificazione interpretativa e che sia stata parzialmente celata in tal modo parte della complessità della personalità del massimo logico del Novecento.

2.1. Gödel e il platonismo.

Da una lettura dell'articolo del 1944 intitolato *Russell's mathematical logic* emerge un importante argomento con cui Gödel cercò di sostenere il suo realismo concettuale. In matematica ricorre spesso l'uso di un metodo definitorio di questo tipo: il numero naturale n appartiene all'insieme A (di numeri naturali) se per ogni insieme di numeri naturali (e dunque in particolare anche per A stesso) è vera una certa proposizione P. In logica si è soliti chiamare questo tipo di espressioni, *definizioni impredicative*. La caratteristica logica fondamentale delle definizioni impredicative, come salta subito all'occhio, sta nel fatto che in esse il definiendum (nell'esempio fatto, l'insieme A) occorre già implicitamente nel definiens (nell'esempio si fa riferimento infatti alla classe di tutti gli insiemi di numeri naturali). Gödel osserva che queste definizioni potrebbero sembrare inaccettabili sulla base del principio logico del circolo vizioso. Per usare le sue stesse parole:

«...il principio del circolo vizioso proibisce un certo tipo di ‘circolarità’ ritenuta responsabile dei paradossi. La loro erroneità, così si sostiene, consiste nel fatto che si definiscono (o si assumono tacitamente) totalità la cui esistenza comporterebbe necessariamente l'esistenza di certi nuovi elementi definibili solo in termini di tale totalità. Questo conduce alla formulazione di un principio il quale afferma che ‘nessuna totalità può contenere membri definibili solo in termini di tale totalità’...».[16]

La circolarità viziosa di cui sono accusate le definizioni impredicative non è però così scontata e pacifica come potrebbe apparire ad un primo sguardo. Di fatto, osserva Gödel, ci troviamo di fronte ad un circolo vizioso solo se assumiamo una concezione predicativista o definizionale o concettualista degli enti matematici. Dice infatti il nostro autore:

[16]«...the vicious-circle principle [...] forbids a certain kind of ‘cicularity’ which is made responsible for the paradoxes. The fallacy is this, so it is contended, consiste in the circumstance that one defines (or tacitly assumes) totalities, whose existence would entails the existence of certain new elements of the same totality, namely elements definable only in terms of the whole totality. This led to the formulation of a principle which says that ‘no totality can contain members definable only in terms of this totality’...» (K. Gödel, *Op. cit*. pag. 125).

«...il principio [del circolo vizioso] si applicherebbe solo se le entità in questione venissero costruite da noi [...]. Se invece si tratta di oggetti che esistono indipendentemente dalle nostre costruzioni in fondo non c'è nulla di assurdo nell'esistenza di totalità che contengano membri che possano essere descritti (cioè univocamente caratterizzati) solo con riferimento a tale totalità».[17]

E aggiunge:

«...il principio del circolo vizioso [...] si applica solo assumendo un punto di vista costruttivista (nominalista) riguardo agli oggetti della logica e della matematica, in particolare riguardo a nozioni, classi e proposizioni...». [18]

Secondo Gödel, dunque, la presenza stessa e l'efficace applicazione delle definizioni impredicative in matematica è per lo meno un sintomo (se non addirrittura una ragione sufficiente) dell'opportunità di abbracciare una filosofia della matematica platonista. Leggiamo infatti, sempre in *Russell's mathematical logic*:

«Classi e concetti [...] possono essere concepiti come oggetti reali [...]. Mi sembra che l'assunzione di tali oggetti sia altrettanto legittima dell'assunzione dei corpi fisici, e che ci siano almeno altrettanti motivi per credere nella loro esistenza: essi sono necessari per ottenere un sistema matematico soddisfacente nello stesso senso in cui i corpi fisici sono necessari per una teoria soddisfacente delle nostre percezioni sensoriali [...]».[19]

In realtà, il tema dell'impredicatività e il suo stretto legame con la filosofia della matematica fu intravisto da Gödel più di dieci anni prima della pubblicazione dell'articolo sulla logica di Russell. Infatti, in un inedito del 1933 intitolato *The present situation in the foundation of mathematics*, recentemente pubblicato nel terzo volume delle *Collected Works* di Gödel, troviamo la seguente osservazione:

---

[17]«...the vicious-circle principle [...] applies if the entities involved are constructed by ourselves. [...] If, however , it is a question of object that exist independently of our constructions , there is nothing in the least absurd in the existence of totalities containing members which can be described (i.e. uniquely characterized) only by reference to this totality» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 127).

[18]«...the vicious-circle principle [...] applies only if one takes the constructivistic (or nominalistic) standpoint toward the object of logic and mathematics, in particular toward propositions, classes and notions...» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 127)

[19]«Classes and concepts [...] may be conceived as real objects [...]. It seems to me that the assumption of such objects is quite as ligitimate as the assumption of phisical bodies and there is quite as much reason to believe in theire existence. They are in the same sense necessary to obtain a satisfactory systems of mathematics as physical bodies are necessary for a satisfactory theory of our sense perceptions [...]» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 128).

«...questo processo di definizione presuppone che la totalità di tutte le proprietà esista in qualche modo indipendentemente dalle nostre conoscenze e dalle nostre definizioni e che le nostre definizioni servano puramente ad isolare alcune di queste proprietà già prima esistenti. Se assumiamo ciò il metodo della definizione impredicativa è perfettamente valido (com'è stato puntualizzato da Ramsey), poichè non c'è nulla di obiettabile nel caratterizzare un elemento di una totalità previamente data con riferimento all'intera totalità; *noi lo facciamo, ad esempio, quando parliamo dell'edificio più alto della città*».[20]

Gödel prosegue dicendo:

«...la situazione diventa totalmente diversa se noi consideriamo le proprietà come generate dalle nostre definizioni. Poichè è certamente un circolo vizioso generare un concetto con riferimento ad una totalità nella quale questo oggetto reale si presuppone essere già presente».[21]

La cosa sorprendente è che in questo inedito del '33 l'analisi delle definizioni impredicative conduce il nostro autore ad una conclusione opposta a quella del 1944. Nel '33, infatti, Gödel afferma risolutamente che:

«...i nostri assiomi, se interpretati come proposizioni dotate di senso, presuppongono necessariamente una sorta di *Platonismo che non può soddisfare alcuna mente critica* e che non produce nemmeno l'impressione che questi assiomi siano consistenti».[22]

Il problema, a questo punto, consiste nel trovare una spiegazione che renda compatibile questa dichiarazione anti-platonista con le affermazioni platoniste degli anni '40. La nostra proposta di risoluzione di questa tensione interna all'opera di Gödel consta di due distinzioni, una storica e biografica, l'altra concettuale e filosofica.

---

[20]«...this process of definition presupposes that the totality of all properties exists somehow independently of our knowledge and our definitions, and that our definitions merely serve to pick out certain of this previously existing properties. If we assume this, the method of non-predicative definition is perfectly all right (as has been pointed out by Ramsey), for there is certainly nothing objectionable in characterizing a particular element of a previously given totality by reference to the whole totality; we do this if, e.g., we speak of the tallest building in a city» (K. Gödel, *The present situation in the foundations of mathematics* pag. 50 in *Collected Works. Vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, Solomon Feferman et al. (a cura di), New York e Oxford, Oxford University Press, (1995), pag. 45-53).

[21]«...the situation becomes entirely different if we regard the properties as generated by our definitions. For it is certainly a vicious circle to generate an object by reference to a totality in which this very object is supposed to be present already» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 50).

[22]«..our axioms, if interpreted as meaningful statements, necessarily presuppose a kind of Platonism, which cannot satisfy any critical mind and which does not even produce the convincion that they are consistent» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 50).

In primo luogo, occorre distinguere il Gödel giovane, interessato più alle questioni tecniche e matematiche che non ai risvolti filosofici del fondazionalismo, dal Gödel maturo (a partire dagli anni '40), attento più alle questioni concettuali che non ai risultati tecnici.

In secondo luogo va distinta la *filosofia della matematica* del nostro autore (certamente platonista almeno dal 1944) dal suo *approccio tecnico e metodologico* che, per molti versi risulta essere orientato in senso costruttivista e addirittura finitista (noi considereremo il finitismo come una forma forte di costruttivismo).

Il primo distinguo esula un pò dai fini di questo articolo in quanto riguarda più la biografia intellettuale che non la filosofia di Gödel. Ci limitiamo dunque a ricordare che in età giovanile (durante l'università e nel periodo immediatamente successivo) il nostro autore fu molto vicino all'ambiente del Circolo di Vienna[23] (fu infatti amico di Rudolf Carnap e allievo di Hans Hahn) che potè in qualche modo condizionarlo in senso anti-metafisico e quindi anti-platonista.

D'altro canto fra il 1935 e il 1940 Gödel lavorò intensamente alla teoria degli insiemi maturando attraverso questa esperienza una grande attenzione per i risvolti filosofici e concettuali dei problemi tecnici logico-matematici.[24]

La seconda distinzione da noi proposta ci sembra particolarmente interessante in quanto ci conduce ad un'analisi del punto di vista di Gödel rispetto al costruttivismo in matematica e cioè rispetto al programma di Hilbert, da un lato, e rispetto all'intuizionismo brouweriano, dall'altro.

Lo scopo di questa disamina sarà quello di far affiorare il retaggio gödeliano nei confronti di due approcci costruttivisti, tradizionalmente descritti come meri obiettivi polemici dell'opera del nostro autore.

2.2. Gödel e Hilbert.

A dispetto dei luoghi comuni il debito di Gödel nei confronti della figura di David Hilbert e del programma da lui delineato risulta essere difficilmente sovrastimabile.

Di fatto persino i teoremi di incompletezza non sono legati al programma di Hilbert soltanto negativamente. Questi risultati, infatti, da un lato, si inseriscono nel paradigma di ricerca hilbertiano in quanto costituiscono pur sempre una soluzione di un problema proposto da Hilbert, dall'altro, sono stati realizzati mediante una tecnica, nota come gödelizzazione o aritmetizzazione,[25] il cui spirito è chiaramente costruttivo in senso

[23]Pur non essendo stato, a rigor di termini, un membro del Circolo di Vienna.

[24]Si veda a tal proposito l'articolo K. Gödel *What is Cantor's continuum problem?*, «American mathematical monthly» 54, (1947), pag. 515-525 (trad. it. In C. Cellucci (a cura di) *La filosofia della Matematica*, Bari, Laterza, (1967)).

[25]Consistente nella codifica mediante numeri naturali della morfologia e della sintassi dei sistemi formali.

formalista e nominalista (questa tecnica si basa infatti sull'idea di ridurre (nel senso di codificare) termini per predicati, relazioni e deduzioni a numeri).
Anche il grande lavoro gödeliano sulla teoria degli insiemi, cioè la prova di consistenza dell'ipotesi del continuo[26] e dell'assioma di scelta,[27] fa riferimento a tecniche dimostrative hilbertiane. In una lezione inedita del 1939, dedicata alla prova di consistenza, leggiamo infatti:[28]

«...il primo a delineare un programma per la prova di consistenza fu Hilbert nella sua lezione "Sull'infinito" del 1925. Verso la fine di quella lezione Hilbert indicò come il metodo della sua teoria della dimostrazione conducesse anche a una soluzione del problema del continuo di Cantor...[...] La prova di cui vorrei parlare è analoga a questo programma...». [29]

E ancora nella lezione inedita tenuta l'anno successivo, sempre su questo tema, si legge:

«...di recente sono riuscito a dare alla prova [di consistenza dell'ipotesi del continuo] una forma che la rende in qualche modo simile al programma di Hilbert presentato nella sua lezione "Sull'infinito"».[30]

Infine nella prova di consistenza dell'aritmetica di Peano, cioè del sistema formale PA, pubblicata nel 1958 nel breve articolo intitolato *Über ein bisher noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes*, divenuta poi nota fra i logici come *'Dialectica*

[26]L'ipotesi del continuo di Cantor costituisce una possibile risposta al cosiddetto *problema del continuo di Cantor*. In K. Gödel, *Op. cit*, pag. 515, leggiamo: « Il problema del continuo di Cantor è semplicemente la questione: di quanti punti è formata una retta dello spazio euclideo? Una questione equivalente è: quanti sono gli insiemi di numeri interi?» In teoria degli insiemi il numero degli elementi di un dato insieme M viene detto la *cardinalità o il numero cardinale* di quel dato insieme e due insiemi avranno la stessa cardinalità se i loro elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca (cioè in corrispondenza uno-a-uno). Ora l'ipotesi del continuo può essere espressa come segue: *ogni sottoinsieme infinito del continuo ha la cardinalità degli interi o del continuo.*

[27]L'assioma di scelta può essere espresso come segue : *se S è un insieme di insiemi non vuoti, a due a due disgiunti, cioè tale che due qualsiasi elementi di S non hanno elementi in comune, allora esiste almeno un insieme C che contiene un unico elemento di ciascun elemento di S.*

[28]Vedi Kurt Gödel, *Vortrag Göttingen*, conferenza inedita, Göttingen (1939) in K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 126-155

[29]«...ist der erste, der ein Programm für eine Wiederspruchsfreiheitsbeweis der Kontinuumhypothese entworfen hat, Hilbert, in seinem Vortrag *Über das Unendliche*aus dem Jahre 1925. Am Schluss dieses Vortrags setzt Hilbert auseinander, dass die Methode der Beweistheorie auch zu einer Lösung des Cantorschen Continuumproblems führt...[...]. Der Beweis, über den ich hier referieren möchte, ist diesem Programm insofern analog...» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 128).

[30]«Just recently I have succeded in giving the proof a new shape which makes it somewhat similar to Hilbert's program presented in his lecture *Über das Unendliche*» (K. Gödel, *Lecture on the consistency of the continuum hypotesys,* pag. 175 in K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 175-185) .

interpretation' dell'aritmetica, Gödel cerca, da un lato, di realizzare una forma indebolita dell'obiettivo fondamentale del programma di Hilbert (la prova di consistenza), dall'altro, recupera l'idea hilbertiana (presente sempre nell'articolo *Sull'infinito*) di utilizzare le funzioni calcolabili generalizzate chiamate *funzionali calcolabili di tipo finito*.[31]

Questi 'sintomi' del retaggio hilbertiano nell'opera di Gödel risultano corroborati da alcune affermazioni esplicite presenti in una lezione inedita del 1938, intitolata *Vortrag bei Zilsel*,[32] interamente dedicata al problema della consistenza. In questo *paper* il nostro fa alcune importanti osservazioni che ci possono aiutare a mettere a fuoco il suo reale giudizio sul programma di Hilbert.

In primo luogo egli nota che una prova di consistenza si dà solo nel senso di una *riduzione*, ossia nel senso della dimostrazione della consistenza di un cerso sistema formale S mediante i presupposti e gli strumenti deduttivi di un sottosistema S' di S. In tal modo si riduce il problema della consistenza di S a quello della consistenza di S'. Questo tipo di riduzione, secondo il nostro autore, costituisce un risultato *oggettivo* che risulta essere significativo per i fondamenti sia da un punto di vista epistemologico che dal punto di vista matematico.

Esiste, prosegue Gödel, un secondo tipo di riduzione che consiste nel dimostrare la consistenza di un certo sistema S mediante un sistema più evidente S". In questo caso ci troviamo di fronte ad un risultato epistemologicamente meno rilevante del precedente in quanto viziato dal fatto che la maggiore o minore evidenza di un sistema formale non costituisce un dato oggettivo. Resta comunque il fatto, sottolinea il nostro, che sia storicamente che nella pratica matematica attuale, si sono sempre considerati come più evidenti e affidabili i sistemi *costruttivi* rispetto a quelli non costruttivi.

Ma cosa intende Gödel con l'espressione 'sistema formale costruttivo'?

Nel *Vortrag bei Zilsel* la risposta a questo interrogativo consiste nella formulazione da parte del nostro di un *paradigma di costruttività di un sistema formale* che rimanda in manera piuttosto diretta all'aritmetica finitaria di Hilbert. Le caratteristiche di un sistema formale strettamente costruttivo (cioè il più costruttivo possibile) sarebbero le seguenti:

(1) la calcolabilità delle operazioni primitive e la decidibilità delle relazioni primitive;

---

[31]Si tratta di quelle funzioni sempre calcolabili in cui non si ammettono soltanto numeri naturali, ma anche funzioni, come argomenti e valori. Una funzione calcolabile definita sull'insieme dei numeri naturali e a valori sull'insieme dei numeri naturali verrà definita un *funzionale calcolabile di tipo 1*, una funzione calcolabile definita sulla classe dei funzionali calcolabili di tipo uno e a valori sulla classe dei funzionali calcolabili di tipo una sarà detta un *funzionale calcolabile di tipo 2*, e così via. Non essendo ammissibile un'iterazione infinita o transfinita di questo processo di definizione di questi funzionali, essi vengono chiamati *di tipo finito.*

[32]Si tratta infatti di un intervento tenuto da Gödel in un seminario organizzato da Edgar Zilsel a Vienna (cfr. Kurt Gödel, *Vortrag bei Zilsel*, conferenza inedita, Wien, (1938) in Kurt Gödel, *Op. cit.*, pag. 86-113)

(2) l'assenza di quantificatori esistenziali e l'impossibilità di applicare i connettivi a proposizioni universali;

(3) l'ammissibilità di definizioni sempre ricorsive e la presenza del calcolo proposizionale, della regola di sostituzione e dell'induzione completa;

(4) la visualizzabilità o numerabilità degli oggetti dell'universo di discorso.

Un sistema che soddisfa queste quattro condizioni è l'aritmetica finitaria o teoria ricorsiva dei numeri formulata da Hilbert e Bernays nelle *Grundlagen der Mathematik*. Ma chiaramente sulla base del secondo teorema di incompletezza questo sistema è di gran lunga troppo debole per dimostrare la consistenza dell'aritmetica di Peano PA.

Sulla base di quest'ultima osservazione, sempre nell'inedito del '38, Gödel passa in rassegna tre possibili vie[33] per ottenere una prova di consistenza per l'aritmetica, confrontandole e verificandone la sostenibilità sulla base del paradigma di costruttività visto sopra. Il nostro autore rileva il fatto che la via più soddisfacente in tal senso sembra essere quella di utilizzare un sistema analogo alla teoria dei numeri ricorsiva in cui si ammettano però come oggetti di discorso, oltre ai numeri naturali, anche i funzionali calcolabili di tipo finito.

Dopo questa analisi tecnica che di per sè già deve molto alle idee e alle tecniche di Hilbert, Gödel conclude la lezione del 1938 con una breve ma signficativa nota sul programma di Hilbert. Dice il nostro autore:

«[Se il programma di Hilbert si fosse potuto realizzare] si sarebbero soddisfatti i seguenti requisiti:

1. la matematica sarebbe stata ridotta ad una parte davvero piccola di se stessa (perciò un gran numero di assunzioni indipendenti sarebbero diventate superflue);
2. ogni cosa sarebbe stata ricondotta ad una base concreta sulla quale *tutti avrebbero potuto essere d'accordo*»[34]

Ecco perchè, sostiene Gödel, la realizzazione del programma di Hilbert avrebbe avuto un valore epistemologico, oltre che matematico, enorme. Il fatto che i risultati di incompletezza abbiano reso impossibile la riuscita di questo programma nella sua forma originale, ne ridimensiona certamente in misura notevole il valore epistemologico, ma, è

[33]Si tratta della prova di Gentzen (per la quale si veda G. Gentzen, *Die Wiederspruchfreiheit der reinen Zahlentheorie*, «Mathematische Annalen» 112, (1936), pag. 493-565), della prova di consistenza relativa dell'aritmetica classica rispetto a quella intuizionista (vedi K. Gödel, *Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie*, «Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums» 4, (1933), pag. 34-38) e infine dell'idea, qui ancora allo stato embrionale, che starà alla base della ‘Dialectica interpretation’ dell'aritmetica.

[34]«Falls das ursprüngliche Hilbertsche Programm durchfürbar gewesen wäre [...] (1) Die Mathematik wäre auf einen sehr kleinen Teil von sich reduziert worden (also eine grosse Anzahl von unabhängigen Annahmen [wären] überflüssig geworden). (2) Es wäre wirklich alles auf einen konkrete Basis reduziert worden, auf die alle sich müssen einigen können.» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 112)

molto importante sottolinearlo, non ne compromette minimamente la portata matematica. Gödel conclude infatti la sua lezione dicendo:

«...la portata matematica di queste ricerche mi sembra di fatto di straordinaria importanza e sono convinto che i metodi qui applicati condurranno a risultati molto interessanti sia nella ricerca fondazionale che al di fuori di essa».[35]

2.3. Gödel e l'intuizionismo.

Come abbiamo cercato di mostrare qui sopra Gödel sembra avere un grosso debito nei confronti del costruttivismo hilbertiano. Vediamo ora in che misura il nostro autore risulta invece legato, in positivo e in negativo, al costruttivismo intuizionista.

Già nel corso degli anni Trenta Gödel contribuì in maniera rilevante ad una migliore comprensione logico-matematica dell'intuizionismo sia dal punto di vista deduttivo (con la *traduzione negativa*[36] che procura una dimostrazione di *equivalenza deduttiva*[37] dell'aritmetica intuizionista rispetto a quella classica[38]) che dal punto di vista semantico (con la *traduzione modale*[39] la quale ottiene un'interpretazione della nozione intuizionista di *verità* (cioè della *provabilità costruttiva*) in termini di *necessità logica*).

Nel corso degli anni Quaranta, in particolare con una lezione inedita del 1941, intitolata *In what sense is intuitionistic logic constructive?*, il nostro autore si impegnerà anche in un'attenta critica e analisi filosofica dell'istanza intuizionista e proprio questa riflessione costituirà parte del fondamento concettuale che sarà alla base della già citata ‘Dialectica interpretation’ dell'aritmetica.

Nella conferenza del '41 Gödel sottopone l'intuizionismo ad un duplice test di costruttività. Da un lato, egli verifica se i sistemi formali intuizionisti rispettano il paradigma di costruttività che abbiamo visto nella sottosezione 2.2. e, dall'altro, si

---

[35]«....die mathematische Bedeutung dieser Untersuchung [...] scheint hier tasächlich ausserordentlich gross zu sein, und ich bin überzeugt, dass die dabei verwendeten Methoden in der Grundlagenforschung und auch ausserhalb ihren zu sehr interessanten Resultaten führen werden.» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 112)

[36]Si tratta di un metodo che consente di tradurre ogni formula derivabile nell'aritmetica classica in un'opportuna formula derivabile nell'aritmetica intuizionista.

[37]Due sistemi formali Se S' si dicono *deduttivamente equivalenti* se per ogni formula F del linguaggio del sistema S, derivabile nel sistema S, esiste un'opportuna traduzione di F, diciamo F', nel linguaggio di S', che sia derivabile in S', e viceversa.

[38]Si veda al riguardo K. Gödel, *Zur intuitionistischen arithmetik und zhalentheorie*, in *Collected Works. Vol. I: Publications 1929-1936*, Solomon Feferman et al. (a cura di), New Ypork e Oxford, Oxford University Press, (1986).

[39]La traduzione modale è costituita da un metodo che permette di tradurre ogni formula derivabile mediante il calcolo proposizionale intuizionista in un'opportuna formula derivabile in un certo sistema per la logica modale proposizionale noto nella letteratura come sistema S4.

chiede se per lo meno questi sistemi formali risultano essere adeguati rispetto al paradigma di costruttività proposto dagli stessi fautori dell'intuizionismo.[40]
In entrambi i casi i sistemi intuizionisti risultano essere inadeguati. Quale sarebbe il motivo dell'inadeguatezza di tali formalismi?
Essi costituiscono la controparte formale di una semantica cioè di un'ontologia (sulla base della quale la *verità di un enunciato* dev'essere intesa come *provabilità costruttiva di quell'enunciato*) che secondo Gödel risulta essere fortemente problematica e discutibile al punto da dubitare della sua stessa costruttività. Dice infatti il nostro autore:

«... i termini primitivi della logica intuizionista mancano di quella completa perspicuità e chiarezza che sarebbe richiesta per i termini primitivi d un sistema intuizionista. Ad esempio [...] il termine ‘derivato’ non può essere inteso nel senso di una ‘derivazione in un sistema formale definito’. (Per questa nozione gli assiomi della logica intuizionista non valgono). Così la nozioni di derivazione o di dimostrazione dev'essere fornita nel suo senso intuitivo come qualcosa di dato direttamente dall'intuizione, senza che sia necessaria nessun'altra spiegazione. Questa nozione di *prova intuizionisticamente corretta* o di *prova costruttiva* non ha la precisione desiderabile».[41]

La forte conclusione di Gödel è dunque che:

«..[la nozione di prova costruttiva] costituisce un controesempio contro la sua stessa ammissibilità, nella misura in cui resta in dubbio se una prova che utilizza questa nozione di prova costruttiva sia costruttiva oppure no».[42]

2.4. Il costruttivismo nella definizione di un ‘platonista’.

Dall'ultima citazione riportata qui sopra sembrerebbe scaturire una condanna senza appello dell'istanza intuizionista. In realtà, proprio sulla base della già citata traduzione negativa, Gödel era conscio del valore dei sistemi formali intuizionisti, e in particolare

---

[40]Questi paradigma secondo il nostro autore consistono nei seguenti punti: (1) rifiuto della validità universale del principio del terzo escluso e delle prove di esistenza non costruttive; (2) rifiuto delle definizioni impredicative.

[41]«..the primitive terms of intuitionistic logic lack the complete perspicuity and clarity which could be required for the primitive terms of an intuitionistic system. E.g. [...] the term ‘derived’ cannot be understood in the sense of ‘derivation in a definite formal system’. (For this notion the axioms of intuitionistic logic would not hold.) So the notion of derivation or of proof must be taken in its intuitive meaning as something directly given by intuition, without any further explanation being necessary. This notion of an intuitionistically correct proof or constructive proof lacks the desirable precision». (K. Gödel, *In what sense is intuitionistic logic ocntructive*, pag. 190, in *Op. cit.*, pag. 189-200).

[42]«...[the notion of an intuitionistically correct proof or constructive proof] furnishes itself a counterexample against its own admissibility, insofar as it is doubtful whether a proof utilizing this notion of a constructive proof is constructive or not.» (K. Gödel, *Op. cit.*, pag. 190).

del fatto che l'aritmetica intuizionista possiede una forza deduttiva tale da dimostrare la consistenza dell'aritmetica classica. Ecco perchè, prima nel 1941 (con l'inedito citato nella precedente sottosezione), poi nel 1958 con la ‘Dialectica interpretation’, egli propose un sistema formale costruttivo, noto nella letteratura come *sistema T di Gödel*, basato sul paradigma di costruttività visto nella sottosezione 2.2., il quale sistema oltre a procurare una prova di consistenza per PA, costituisce una semantica davvero costruttiva per l'aritmetica intuizionista.

Il sistema T risulta infatti basato sull'idea di rimpiazzare la nozione informale e imprecisa di *prova costruttiva* con quella matematicamente precisa e ben-definita di *funzionale calcolabile di tipo finito.*

Da un'analisi delle caratteristiche formali del sistema T e della sua semantica intesa emerge una nozione di costruttività che sta a metà strada fra il finitismo hilbertiano e l'intuizionismo (nella caratterizzazione datane da Brouwer, Heyting e Kolmogorov). Del finitismo Gödel accolse un framework rappresentato dal paradigma di costruttività ma rifiutò l'idea di ridurre la conoscenza matematica certa a quella dei soli oggetti concreti quali possono essere i segni del linguaggio di un sistema formale. Dell'intuizionismo Gödel accolse l'ammissione di nozioni astratte fra quelle primitive alla base dei sistemi formali, ma rifiutò l'uso di nozioni astratte matematicamente imprecise come quella di prova costruttiva.

3. *Solomon Feferman: ‘Il programma di Hilbert relativizzato’*

3.1 Introduzione

Con la presente sezione, intendiamo occuparci brevemente di alcuni sviluppi recenti nell'indagine logica sui fondamenti della matematica che, a nostro avviso, possono costituire l'occasione per fornire, soprattutto a quanti non abbiano a che fare abitualmente con simili questioni, un'immagine più autentica del quadro della ricerca contemporanea. Ci riferiamo qui, in particolare, alla vicenda relativa alla scoperta dei celebri teoremi di Gödel e dei cosiddetti ‘teoremi limitativi’ dei sistemi formali, e all'interpretazione dominante di questo fatto, ormai nota anche al di fuori della cerchia dei logici, secondo la quale essi avrebbero sancito la fine del programma hilbertiano. Dato che da quei risultati discende il fatto che i sistemi formali risultano comunque incompleti, sembrerebbe legittimo considerarli uno strumento non più affidabile per la rappresentazione delle conoscenze matematiche. Tutto ciò potrebbe dunque far pensare che la ricerca abbia preso le mosse in seguito da un completo abbandono di quel paradigma incentrato sul loro impiego.[43]

---

[43]Può essere qui utile notare come per alcuni l'indagine logica *avrebbe dovuto* «rompere i ponti» con quell'esperienza in modo decisamente radicale. In ordine di tempo, uno degli ultimi ad assumere un

In realtà, il fascino legato al programma di Hilbert come tentativo di risolvere in maniera sistematica il problema dei fondamenti, era destinato a proseguire nel tempo ben oltre il decennio 'critico' degli anni '30. Nelle poche pagine che seguono, ci si propone proprio di prendere in considerazione alcune tappe importanti di un percorso di rielaborazione di certe tematiche, culminante nella formulazione da parte di Solomon Feferman, figura centrale nel panorama logico contemporaneo, di un 'programma di Hilbert relativizzato', intimamente legato allo sviluppo di sofisticate metodologie di indagine logica.

3.2 La prova di consistenza dell'aritmetica di Gerhard Gentzen

A conferma del fatto che la scoperta dei teoremi di Gödel non fu vissuta come la fine delle aspirazioni legate al programma di Hilbert, la celebre memoria del 1936 del logico matematico tedesco Gerhard Gentzen dal titolo 'La consistenza dell'aritmetica elementare'[44] contiene, a detta dell'autore, una prova di consistenza *finitista* dell'aritmetica. Il punto da cui Gentzen parte è costitutito dal fatto che, se la scoperta dei 'teoremi limitativi' costringe alla rinuncia dell'idea che sia possibile ottenere una prova di consistenza *assoluta*, tuttavia:

«(...) rimane concepibile che la consistenza dell'aritmetica possa di fatto essere verificata mediante tecniche che non appartengono più, in parte, all'aritmetica, ma che possano tuttavia essere considerate *più affidabili* rispetto alle componenti problematiche dell'aritmetica stessa.»[45]

La necessità di ricorrere per un qualsiasi sistema formale dato, in virtù dei due teoremi di Gödel, a strumenti 'esterni' ad esso per riuscire a provarne la consistenza e dunque a rinunciare alla 'purezza dei metodi' hilbertiana, può ugualmente sposarsi dunque con l'idea di una *riduzione fondazionale* (degli elementi problematici del sistema in questione ad altri più accettabili) mediante la dimostrazione di non contraddittorietà, qualora questi strumenti 'in più' godano di una certa quale immediatezza intuitiva. Rimane altrettanto concepibile, allora, che la prova di consistenza così ottenuta possa anche essere finitisticamente giustificabile. A tale proposito occorre peraltro tenere

---

simile punto di vista sembra essere stato Carlo Cellucci (Cfr. Carlo Cellucci, *Le Ragioni della Logica*, Laterza, (1998)).

[44]Il titolo originale dell'articolo è *Die Wiederspruchsfreiheit der reinen Zhalentheorie*, tradotta in inglese nella raccolta, curata M. E. Szabo, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen,* Amsterdam, North Holland, (1969)).

[45]«(...) it remains quite conceivable that the consistency of elementary number theory can in fact be verified by means of tecniques which in part, no longer belong to elementary number theory, but which can neverthless be considered to be *more reliable* than the doubtful components of elementary number theory itself.» (G. Gentzen, *Op. cit.*, pag. 139).

presente che quest'espressione riferita a metodi formali di inferenza, non aveva trovato una precisa delimitazione semantica negli scritti di Hilbert. Ciò che poteva essere considerato allora ‘finitisticamente giustificabile’ e in che cosa consistesse in effetti la ‘matematica finitaria’ così tanto citate nell'opera hilbertiana, era da considerarsi determinato solo in termini vaghi.[46]

Venendo in breve al contenuto del lavoro di Gentzen, esso contiene la prova del fatto che il sistema per l'artimetica[47] risulta consistente, qualora si ammetta il principio che estende la possibilità di ragionare per induzione sui numeri naturali presi nel loro (buon) ordine[48] ‘usuale’,[49] ad un qualsiasi (buon) ordinamento di essi, entro certi limiti ben precisi.[50] La dimostrazione di consistenza elaborata da Gentzen, infatti, passa attraverso la definizione di un sistema di regole di trasformazione e riscrittura di una qualsiasi prova di un teorema aritmetico in modo che, ad ogni passo, la successione di formule in questione ne risulti semplificata da un punto di vista della complessità logica. L'assunzione del principio in questione, detto di *induzione transfinita*, si inserisce in modo necessario nella prova del fatto che un simile processo termina comunque in un numero *finito* di passi.

Per quanto esso presupponga il riferimento ad entità matematiche più astratte di quelle presupposte dalla teoria dei numeri, Gentzen è ugualmente disposto a conferirgli un'intuitività tale da considerare, come si è detto, la prova di consistenza in questione *finitisticamente* giustificabile. Si realizzavano in questo modo gli auspici legati al programma di Hilbert per una parte rilevante della matematica.

L'intuizione di Gentzen ed il suo importantissimo risultato, erano destinati a non rimanere episodi isolati. Già nel 1938 lo stesso Kurt Gödel vedeva nella possibilità di estendere il meccanismo dimostrativo contenuto nel lavoro di Gentzen alle altre

---

[46]Basterà a tale proposito citare il fatto che, tutt'oggi, l'idea che il sistema formale noto in letteratura come **PRA**, per l'aritmetica ‘ricorsiva primitiva’ contenga tutti e soli i metodi di inferenza finitisti, è basata su una congettura, anche duramente criticata, avanzata dal logico Bill Tait agli inizi degli anni '80.

[47]Si può intendere con ciò anche la formulazione ancora oggi ritenuta "standard" dell'aritmetica, ovvero il sistema indicato con **PA** (per l'aritmetica di Peano).

[48]Il principio di induzione nella forma probabilmente nota ai più e secondo il quale, intuitivamente, se una proprietà è verificata per lo zero e si trasmette da un numero al proprio successore, allora è verificata per tutti i numeri naturali, deve la propria immediatezza al fatto che nella possibilità di generare l'intera classe dei numeri naturali a partire da un primo elemento, lo zero, mediante l'applicazione della sola operazione di successore (l'aggiunta di un'unità). In questa definizione, è implicito il fatto che il sistema così ottenuto risulti *bene ordinato* da una relazione binaria $<$ d'ordine (ariflessiva, asimmetrica e transitiva) che risulta sui suoi elementi anche *connessa* (tale che, per ogni n n', $n<n'$ o $n'<n$ o $n=n'$) e tale che per ogni insieme di naturali esista l'elemento $<$-minimale (ovvero un certo m, tale che, per ogni elemento n di quell'insieme *non valga* $m<n$). La teoria degli ordinali nel suo significato più intuitivo, non è altro che una teoria dei vari tipi di *buoni ordinamenti* su insiemi qualsiasi. Ristretta ai tipi di buon ordinamento dei numeri naturali, essa è la teoria degli ordinali *numerabili*.

[49]Normalmente il tipo d'ordine ‘standard’ del sistema dei numeri naturali, viene indicato con w.

[50]È possibile dimostrare che è sufficiente assumere il principio in questione come limitato all'ordinale numerabile noto come e_0.

porzioni della matematica astratta, uno dei modi più affidabili per riproporre la problematica fondazionale sullo stesso piano della trattazione hilbertiana.[51] Ma ancora in tempi più vicini a noi, intorno agli anni '70, due brillanti logici contemporanei, Gaisi Takeuti e Kurt Schütte, davano vita ad un programma fondazionale basato sull'idea di Gentzen:

«Crediamo che il nostro punto di vista sia un'estensione naturale del finitismo di Hilbert, simile a quello introdotto da Gentzen, e perciò lo si indica come il punto di vista di Hilbert-Gentzen. Una prova di consistenza alla Gentzen viene così di seguito condotta: (1) si costruisce un buon ordinamento opportuno in modo strettamente finitista. (2) Occorre convincersi, secondo il punto di vista di Hilbert-Gentzen, che questo è un buon ordinamento. (3) In ogni altro caso, si fa uso solamente di metodi strettamente finitisti nella prova di consistenza.»[52]

3.3 La revisione del paradigma hilbertiano

Rispetto al tipo di ripresa del programma di Hilbert appena schizzata, il paradigma elaborato a partire dagli anni '50 da parte di Georg Kreisel, un altro personaggio di riferimento per la ricerca logico matematica del secondo dopoguerra, si discosta soprattutto perché con esso, a partire da un'analisi critica dei presupposti della posizione hilbertiana, si tende lentamente a perdere l'enfasi sulle prove di consistenza quale mezzo per risolvere il problema dei fondamenti. Volendo riassumere schematicamente gli elementi di maggior rilievo della critica kreiseliana all'‘hilbertismo’, lo si può fare nei seguenti punti:
1) alla luce delle acquisizioni recenti nel campo dei fondamenti, si sente la necessità di estendere la cornice concettuale di fondo oltre il finitismo:

«Invece che limitarsi ad un solo tipo di ragionamento elementare a partire dal quale si possa comprendere l'uso dei termini transfiniti, ci sono adesso metodi di ragionamento che coinvolgono una gerarchia (...) di concezioni sempre più astratte di ‘costruzione’, e una gerarchia di programmi di Hilbert *per la scoperta di quale di questi metodi sia*

---

[51]Il testo che contiene le affermazioni in questione, è il *Vortrag bei Zilsel*, contenuto nel volume degli scritti inediti (il terzo) dei *Collected Works* di Gödel (si veda la sezione precedente di questo articolo).
[52]«We believe that our standpoint is a natural extension of Hilbert's finitism standpoint, similar to that introduced by Gentzen, and so we call it the Hilbert-Gentzen finitist standpoint. Now, a Gentzen-style consistency proof is carried out as follows: (1) Construct a suitable standard well-ordering, in a strictly finitist standpoint. (2) Convince oneself, in the Hilbert-Gentzen standpoint, that it is indeed a well-ordering. (3) Otherwise use only strict finitist means in the consistency proof.» (G. Takeuti, *Proof Theory* (2ª edizione), Amsterdam, North Holland, (1987)).

adeguato per la comprensione dell'uso dei simboli finitari entro certi sistemi (programma di Hilbert modificato).»[53]

2) Come si è già accennato, a ciò si accompagna una critica del valore fondazionale delle prove di consistenza:

«Come molti altri (...) provavo repulsione per l'affermazione esagerata di Hilbert secondo la quale la consistenza è una condizione sufficiente per assicurare l'esistenza matematica o una qualche forma di validità.»[54]

3) Alla luce di 1 e 2, si produce un'approccio alternativo di tipo 'locale' («(...) *Determinare il contenuto costruttivo (ricorsivo) o un equivalente costruttivo di concetti e teoremi utilizzati in matematica*, in particolare in aritmetica e in analisi.»[55]), in contrasto con i propositi assolutistici del programma hilbertiano:

«Non si tratta affatto di questioni relative a concetti che siano più 'affidabili' rispetto a quelli correnti in matematica, ma di concetti che forniscano una cornice di riferimento per la discussione dello stato delle conoscenze matematiche.»[56]

In ultima analisi, il senso più profondo della proposta di Kreisel sembra essere proprio quello di ricondurre la problematica fondazionale al suo significato matematico, attenuandone decisamente le implicazioni filosofiche.
Da un punto di vista metodologico, ad accompagnare questo paradigma alternativo, e ad occupare nel nuovo schema il ruolo ricoperto dalle prove di consistenza, si doveva affermare l'importante acquisizione della cosiddetta 'teoria della dimostrazione'. Concepita dallo stesso Hilbert, seppur in termini generici, quale strumento essenziale per la manipolazione delle dimostrazioni formali al fine di eliminare da esse gli

---

[53]«First, instead of having a single kind of elementary reasoning whereby we understand the use of transfinite symbols, there will now be methods of reasoning involving an hierarchy of (...) more and more abstract conceptions of 'construction', and an hierarchy of Hilbert's programmes of *discovering the appropriate complex of such methods which is needed for understanding the use of transfinite symbols in given systems* (modified Hilbert's programme).» (G. Kreisel, *Hilbert's programme*, «Dialectica» 12, (1958), pag. 349).

[54]«Like many others (...) I was repelled by Hilbert's exaggerated claim for consistency as a sufficient condition for mathematical exististence or some kind of validity.» (in G. Takeuti, *Op. cit.*, pag. 395).

[55]«(...) *To determine the constructive (recursive) content or the constructive equivalent of the non-constructive concepts and theorems used in mathematics*, particularly arithmetica and analisys.» (G. Kreisel, *Mathematical significance of consistency proofs*, «The Journal of Symbolic Logic» 23, (1958) pag. 155).

[56]«It is not at all a question of concepts which are more "reliable" than those of current mathematics but of concepts which provide a frame of reference for discussing the status of mathematics.» (G. Kreisel, *Op. cit.*, pag. 355).

elementi concettualmente ‘problematici’ (non finitari), essa doveva trovare una sistematizzazione più definitiva grazie al geniale apporto proprio di Gerhard Gentzen. È con lui, infatti, che si ottiene quell'affinamento della rappresentazione formale dei processi deduttivi, nei ‘calcoli per la deduzione naturale’ in primo luogo, e nei ‘calcoli delle sequenze’, grazie al quale diviene particolarmente semplice giungere ad una precisazione di un sistema di regole per intervenire sugli alberi dimostrativi. Da questo punto di vista, la prova della consistenza dell'aritmetica cui si accennava in precedenza, può essere considerato come uno dei primi lavori, ed anche uno dei più significativi, dell'uso della ‘teoria della dimostrazione’, nella sua nuova veste, in campo fondazionale.

Sarà lo stesso Kreisel[57] ad intravedere la possibilità di utilizzare quest'ultima all'interno di un contesto sistematico di ricerca sui fondamenti della matematica. Ma la proposta più recente in questo senso di cui intendiamo occuparci qui di seguito è invece quella di Solomon Feferman.

3.4 Il ‘programma di Hilbert relativizzato’

Allievo di Alfred Tarski, Solomon Feferman ha abbracciato con i suoi lavori, spesso essenziali, tutto lo spettro dei risvolti di maggior interesse nella ricerca logico-matematica contemporanea. Rispetto ad essi, l'elaborazione del ‘programma di Hilbert relativizzato’, si pone allora quale punto di arrivo di tutta la sua produzione dedicata alle problematiche fondazionali.

La volontà di mantenere lo spirito dello schema hilbertiano e la necessità di mutarne essenzialmente quei caratteri responsabili dei limti da esso denunciati, bene emergono dal modello generale alla base della proposta di Feferman che si può riassumere come segue:

Un corpo di conoscenza matematiche M è rappresentato in una teoria formale T_1 giustificata da uno schema fondazionale F_1. T_1 ***si riduce*** ad un sistema T_2, giustificato in termini di uno schema fondazionale ***più elementare*** F_2.

Le differenze rispetto alla posizione di Hilbert, riconducibili a quel percorso che rimanda all'opera di Kreisel, sono essenzialmente due. In primo luogo, si assiste alla perdita di quella ***reductio ad unum*** tipica del dogmatismo alla base del programma finitista (condiviso, in varia misura, anche dalle altre ‘scuole’ fondazionali). Nel caso di Hilbert, F_1 coincide con l'apparato concettuale relativo alla teoria degli insiemi (comprendente, dunque, la possibilità del ricorso all'infinito attuale e a metodi di

[57]Cfr ad esempio, G. Kreisel, *A survey of proof theory, I*, «The Journal of Symbolic Logic» 33, (1968), pag. 321-388.

inferenza non costruttivi), mentre F_2 non è altro che il quadro di fondo della matematica finitista (che ammette esclusivamente l'infinito potenziale e metodi di inferenza costruttivamente accettabili).

Sotto questo aspetto, l'elemento che maggiormente caratterizza la proposta di Feferman viene da lui stesso riassunto, riecheggiando le parole di Kreisel, nel fatto che, se nel caso di Hilbert si può parlare di un programma fondazionale 'globale', il programma relativizzato propone, al contrario, una prospettiva 'locale' in cui, liberi dalle preoccupazioni e dalle ambizioni delle posizioni fondazionali tradizionali si possa riproporre quelle problematiche ad un livello che sia anche più vicino a come la ricerca matematica è condotta quotidianamente. In fin dei conti, sostiene Feferman, il tipo di ricerca che egli ha in mente non si distanzia molto da quelle strategie che i matematici hanno in passato attuato e ancora oggi continuano a fare, di fronte alle difficoltà concettuali cui lo sviluppo della disciplina conduce. L'analisi dell'articolazione in cui si scandisce il processo di acquisizione delle conoscenze matematiche, parte da un presupposto irrinunciabile che è l'elemento alla base del rinnovamento della tradizione fondazionale contenuto nel punto di vista di Feferman: il dibattito sui fondamenti si è semplicemento indirizzato lungo una direzione *sbagliata*. Non si tratta, infatti, di ricondurre e riconciliare le conoscenze acquisite con una visione generale su quello che la matematica è. Al contrario, proprio l'infruttuosità e l'inconcludenza degli studi condotti lungo questa linea sembrerebbe rendere lecita l'interpretazione secondo la quale «la matematica è comunque più affidabile di qualsiasi schema che i logici abbiano elaborato per renderne sicure le basi.»[58]

Alla base del punto di vista alternativo di Feferman sembra porsi il fatto che l''attitudine' fondazionale, ovvero tutto ciò che chiama in causa il problema dei fondamenti, non si *aggiunge* (esternamente) al meccanismo euristico di acquisizione delle conoscenze, ma che, a ben vedere, è intrinsecamente legata ad esso. A tal punto che in relazione alle varie modalità con cui ci si è posti di fronte alla necessità di una chiarificazione e di una comprensione maggiori di certi risultati, si può parlare di vere e proprie *strategie fondazionali*.[59] La difficoltà ed anzi la vera e propria impossibilità consiste, ed è qui che interviene l'elemento di maggior relativizzazione della posizione hilbertiana che ci preme chiarire, nel fatto che, trattandosi di risposte a situazioni di 'stallo' determinate da risvolti particolari della ricerca, manca un'unico schema sotto cui poterle uniformare. Allo stesso modo, allora, si deve abbandonare l'idea di poter dare un'interpretazione univoca del discorso matematico, e assumere invece il modello richiamato all'inizio di questo paragrafo in tutta la sua generalità e articolazione. Ciò si

[58]«(...) mathematics is more reliable than any of the foundational schemes which have been propounded by the logicians to 'secure' it.» (S. Feferman, *In the Light of Logic*, New York, Oxford University press, (1998), pag. 94-95).

[59]Per ragioni di opportunità e considerata la loro estrema chiarezza, si rimanda direttamente ai lavori di Feferman dedicati a questo punto, in particolare ai capitoli 4 e 5 di S. Feferman, *Op. cit.*

traduce nel prendere in considerazione, senza preclusioni né prese di principio, le possibili riduzioni delle *parti* della matematica più astratta a *tutte le varie forme* di matematica costruttivamente giustificabile. In primo luogo, allora, ciò che Feferman propone è di allargare il più possibile il confronto con la matematica astratta della teoria degli insiemi, utilizzando come una ricchezza le sfumature ed anche le differenze profonde che sono emerse nel percorso di precisazione delle 'correnti' della matematica costruttiva.

La seconda differenza fondamentale rispetto al programma di Hilbert consiste nella ridefinizione della relazione di riduzione tra teorie formali. Evidentemente la sola prova della consistenza di una teoria mediante un'opportuno 'bagaglio' di principi formali, viene giudicata inadatta allo scopo. Si può pensare che ciò derivi dal fatto che una dimostrazione della non contradditorietà di quel sistema venga giudicato scarsamente informativo su come sia possibile 'trasformare' un qualsiasi processo inferenziale della teoria di partenza in un suo analogo entro un contesto più chiaro da un punto di vista intuitivo. Ovverosia, su come sia possibile *risolvere* la questione relativa al ricorso a dei presupposti astratti per giustificare certi teoremi, riuscendo ad ottenerli ad un livello più elementarmente comprensibile.

È in questo particolare frangente che risulta fondamentale il concorso di una 'teoria della dimostrazione' e, prima ancora, di quella possibilità, individuata per la prima volta da Gödel, di trattare le proprietà metateoriche di un sistema formale all'interno del sistema stesso. Questa caratteristica, valida per quei sistemi formali che contengano un minimo di aritmetica ricorsiva primitiva,[60] si acquisisce attraverso quel procedimento noto sotto il nome di 'gödelizzazione' del linguaggio, ovvero in una codifica dei suoi simboli attraverso un'opportuna attribuzione ad ognuno di essi di un numero (il 'gödeliano', appunto).[61] L'autoriferimento cui si giunge in questo modo è reso possibile dal fatto che il sistema in questione possiede anche i numeri tra i simboli del linguaggio su cui si basa (o comunque la possibilità di esprimerli mediante essi). In particolare, è così possibile definire in una qualsiasi teoria formale S come da ipotesi, un predicato binario $\mathrm{Dim}_S(x,y)$ che esprima il fatto che ''x è (il codice di) una dimostrazione in S e y è (il codice de) la sua formula finale'.[62]

[60] Per chi avesse una qualche preparazione logica, i sistemi in questione sono in particolare le estensioni della teoria indicata con $\Sigma_0^1 - IA$.

[61] Per i dettagli e le sottigliezze che quest'operazione comunque richiede, si veda, ad esempio, E. Casari, *Introduzione alla Logica*, Torino, UTET, (1997), cap. 13-14.

[62] Per maggiore semplicità di lettura si è omesso di indicare i gödeliani, come è uso fare in letteratura, entro virgolette angolari. Nel seguito, se non ulteriormente specificato, si proseguirà a fare ricorso a questa convenzione utilizzando a, b, c,..., x, y, z,..., come variabili per gödeliani.

Fatta questa premessa, si può spiegare la relazione di *riducibilità dimostrativa*[63] tra due sistemi formali, con l'esistenza di una funzione che trasformi *in modo effettivo* ogni prova dell'uno in una prova dell'altro 'preservando' una certa classe Φ di formule del frammento comune dei linguaggi delle due teorie che contenga la formula 0=1.'
Formalmente, dati due sistemi S e T ed una classe Φ di formule come da ipotesi, si dice che 'S è dimostrativamente riducibile a T *tramite la funzione f, conservativamente per la classe di formule* Φ (e lo si indica con: f: $S \leq T$ [Φ]), se e solo f è una funzione ricorsiva[64] tale che:

(1) per ogni p,ϕ, tali che $\mathrm{Dim}_S(p,\phi)$ e $\Phi(\phi)$, allora $\mathrm{Dim}_T(f(p),\phi)$

(2) c'è un sistema $W \subseteq T$ e W dimostra '$\forall x \forall y [\mathrm{Dim}_S(x,y) \wedge \Phi(y) \rightarrow \mathrm{Dim}_T(f(x),y)]$'

dove $\Phi(\phi)$ (o $\Phi(y)$) sta per l'insieme di condizioni che definisce l'appartenenza alla classe Φ di formule (e dunque sancisce che ϕ è una formula della classe Φ o che y ne codifica un elemento), e con $W \subseteq T$ il fatto che il sistema W sia incluso (più debole) nel sistema T.
Dunque, non solo si richiede, come abbiamo già detto, che f trasformi ogni prova in S in una prova analoga in T, ma anche che questo fatto sia dimostrabile in un sistema W, più debole o tutt'al più coincidente con T stesso. Come nelle intenzioni di Hilbert la dimostrazione di consistenza diviene fondazionalmente rilevante se essa è ottenuta con una significativa restrizione sugli strumenti grazie ai quali essa è ottenuta, così la riducibilità dimostrativa contempla che la condizione che la determina debba essere dimostrabile *almeno* nel sistema più elementare (quello al quale si riduce il sistema di partenza).
Concludiamo questa parte dedicata ad una sommaria descrizione dei caratteri del programma di Feferman, mostrando come la soddisfacibilità delle due condizioni appena esposte che ne determinano la relazione formale di riducibiltà, garantisca anche la consistenza *relativa* tra le due teorie coinvolte. [65] Infatti, dalla condizione (1) discende che, per una qualsiasi ϕ tale che $\Phi(\phi)$:
se S dimostra ϕ, allora T dimostra ϕ

[63]Con questa espressione si intende indicare quella che più letteralmente (secondo il lessico logico matemnatico corrente) dovrebbe essere indicata come una *riducibilità proof-teoretica*.

[64]Per completezza bisognerebbe aggiungere che la funzione in questione è ricorsiva *parziale* (ovvero non sempre definita per qualunque argomento). In pratica, però, è sufficiente fare ricorso a funzioni ricorsive *primitive*.

[65]Si parla in logica di 'consistenza relativa di due teorie' nel caso in cui la consistenza dell'una è vera *sotto l'ipotesi* della consistenza dell'altra, ovvero se vale:
$\mathrm{Cons}_S \Rightarrow \mathrm{Cons}_T$
Questo può rivelarsi particolarmente importante dato che comporta il fatto che se T è *contraddittoria* allora già S deve essere tale. Storicamente, ad esempio, è stata proprio la scoperta intorno alla metà dell'800, grazie a Felix Klein, della sussistenza di questa relazione tra la geometria euclidea e quelle non euclidee, per rafforzare lo statuto teoretico di queste ultime.

Ovvero, dato che si è supposto che la classe Φ di formule sia tale che Φ('0=1'), in particolare per essa vale:
se *S* dimostra '0=1', allora *T* dimostra '0=1'
e dunque, per contapposizione, che:
$\mathrm{Cons}_T \Rightarrow \mathrm{Cons}_S$
Infine, da (2), che:
W dimostra '$\mathrm{Cons}_T \rightarrow \mathrm{Cons}_S$'
Ovvero, che anche la consistenza relativa tra le due teorie è dimostrabile con strumenti più elementari di quelli del sistema *S*.

3.5 Conclusione: logica e matematica

Per quanto si sia cercato di presentare il punto di vista di Feferman in relazione al ‘programma di Hilbert relativizzato’ in contrapposizione ad un certo modo ‘filosoficamente impegnato’ di intendere il discorso sui fondamenti della matematica, alcune conclusioni cui egli giunge sembrano di un certo rilievo proprio rispetto a certe problematiche insite originariamente nel dibattito. Per fare un esempio, i risultati che discendono dalle indagini sulla riducibilità di sistemi formali per parti astratte della matematica a teorie costruttivamente giustificabili, consentono a Feferman di avanzare una congettura che, letta in contrasto con quell'argomento secondo il quale il platonismo è l'unico approccio filosofico alla matematica che permette di conservarne anche gli elementi più forti e di maggiore utilità, costituisce un forte argomento a favore della praticabilità di un'impiego su questo terreno anche del costruttivismo.[66] Secondo quest'ipotesi, infatti, *tutta la matematica scientificamente applicata* (indispensabile alla conoscenza scientifica nella sua totalità) *è giustificabile costruttivamente*. Anche ammettendo, dunque, che il ‘primo capitolo’ del dibattito fondazionale, il cui termine potrebbe convenzionalmente essere fissato proprio in coincidenza con il decennio 1930-40 che ha comunque sancito un'importante svolta nelle ricerche, si sia concluso con un rafforzamento della visione realista della matematica, il ‘programma di Hilbert relativizzato’ intende contribuire a rivedere e aggiornare un simile esito. A questo si aggiunga che tra i suoi scritti si trovano numerosissime pagine dedicate all'importante

[66]Per i presupposti non sempre banali che una rassegna dei risultati più segnificativi in questo senso necessiterebbe chiamare in causa, si rimanda ai lavori di Feferman per maggiori dettagli, in particolare a S. Feferman, *Hilbert's program relativized: proof-theoretical and foundational reductions*, «The Journal of Symbolic Logic» 53, pag. 364-384, a S. Feferman, *Op. cit.*, cap. 10, e al recente S. Feferman *Does reductive proof theory has a viable rationale?*, «Erkenntnis» 52, (1), 2000. Esula dal contesto delle opere di Feferman, ma merita ugualmente una citazione in quanto affine per approccio e contenuto ai lavori fin qui considerati (per quanto di maggiore difficoltà tecnica), il testo di S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Berlin, Springer-Verlag, (1998).

ruolo che la logica, come strumento d'analisi, ricopre nei confronti della matematica.[67] Anche in questo caso, egli non si sottrae a fornire un argomento forte a favore dell'approccio logico al problema dei fondamenti, secondo il quale:

«In realtà, io credo che l'analisi logica delle struttura della matematica è più vicina alla spiegazione della nostra esperienza matematica quotidiana di quanto la fisica non riesca a spiegare la nostra quotidiana esperienza fisica.»[68]

A ben vedere, allora, piuttosto che in contrasto con la tradizione, il punto di vista di Feferman assomiglia maggiormente ad una riproposizione più 'matura' e aggiornata di quelle problematiche.

[67]Si consiglia anche in questo caso di leggere di persona i lavori di Feferman in questo senso, tra i suoi più comprensibili, contenuti in S. Feferman, *Op. cit.* (in special modo, i cap. 3, 9, 14).

[68]«Indeed, I believe that the logical analisys of the structure of mathematics comes much closer to explaining our everyday mathematical experience than physics does to explaining our everyday physical experience.» (S. Feferman, *Op. cit.* pag. 92).