

ANNO ACCADEMICO 2009–2010

LAUREA MAGISTRALE IN LOGICA, FILOSOFIA E STORIA DELLA SCIENZA

PROF. PIERLUIGI MINARI / LOGICA 1 (60 ORE - 12 CFU)

## PROGRAMMA PER L'ESAME

### PARTE I — INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA DIMOSTRAZIONE

**Nozioni preliminari.** Linguaggi elementari (identità sintattica a meno di rinomina di variabili vincolate, sostituzione, sottoformule, grado (profondità) di una formula). Liste e multinsiemi finiti. Alberi finiti.

▷ V. appunti presi a lezione, oppure [14] pp. 2–8.

**Il calcolo LK di Gentzen.** Sequenze. Il calcolo: sequenze iniziali, regole strutturali, regole logiche, cesura. LK-dimostrabilità. Esempi di dimostrazioni in LK. Equivalenza con i calcoli assiomatici alla Hilbert. Eliminabilità della regola di cesura e principio della sottoformula. Dimostrazione dello *Hauptsatz*. Varianti (sequenze iniziali atomiche; sequenze iniziali attenuate; formulazione moltiplicativa vs formulazione additiva delle regole).

▷ V. appunti dattiloscritti del docente (*Il calcolo LK di Gentzen; Hauptsatz*), oppure [3] pp. 222–226 e pp. 228–231, oppure [14] pp. 51–58.

**Il calcolo  $LK_3^c$  e il teorema di eliminazione delle cesure.** Il calcolo  $LK_3^c$ . Esempi di dimostrazioni in  $LK_3^c$ . Differenze rispetto a LK. Equivalenza tra  $LK_3^c$  e LK. Misura delle dimostrazioni: altezza e rango. Iperesponenziale a base 2. Lemmi di sostituzione, chiusura sotto attenuazione, inversione, chiusura sotto contrazione. Il “Lemma principale”. Lemma di riduzione e teorema di eliminazione.

▷ V. appunti manoscritti del docente (M1–M25), oppure [14] pp. 65–70 e pp. 113–119.

**Hauptsatz rafforzato e Teorema di Herbrand.** Matrici e formule in forma prenessa. Dimostrazioni bipartite in  $LK_3^c$ . Lemmi di sostituzione e chiusura sotto attenuazione e contrazione con preservazione della bipartizione. Lemma di bipartizione e Hauptsatz rafforzato. Risoluzione herbrandiana e disgiunzioni herbrandiane. Il teorema di Herbrand.

▷ V. appunti dattiloscritti del docente (*Hauptsatz rafforzato e Teorema di Herbrand*).

**Teorema di interpolazione, con applicazioni.** Partizioni di una sequenza. Lemma di Maehara. Teorema di interpolazione di Craig. Somma di teorie e teorema della somma di Robinson. Definibilità esplicita / definibilità implicita / indipendenza di un predicato in una teoria. Teorema di Beth.

▷ V. appunti dattiloscritti del docente (*Interpolazione, somma, definibilità*).

**LETTURA.** Si richiede la lettura (nella traduzione inglese, [9]) *almeno* delle seguenti parti del saggio [scaricabile] “*Untersuchungen über das logische Schließen I, II*” (1935) di G. Gentzen: pp. 68–74 (Synopsis; Section I) e pp. 81–88 (Section 3, §§1–2).

## PARTE II — LOGICHE MODALI

**Logica monomodale e multimodale enunciativa.** Linguaggi mono- e multimodali. Cornici (mono- e multi-)modali, valutazioni, modelli (mono- e multi-)modali di Kripke. Verità in un mondo, verità in un modello, validità in una cornice, validità in una classe di cornici. Logica modale associata a una classe  $C$  di cornici. Verità logica (legge logica) minimale, o “di tipo  $\mathbf{K}$ ”. Alberi di refutazione (*tableaux*) di tipo  $\mathbf{K}$  (prefissi, formule segnate, regole di analisi, alberi completati, rami/alberi chiusi e aperti). Estrazione di contromodelli da alberi aperti.

Corrispondenza modale. Corrispondenze: D – serialità; T – riflessività; B – simmetria; 4 – transitività; E – euclideanità [con dimostrazioni relative]. Estensioni di  $\mathbf{K}$ : **D, T, K4, S4, S5**. Rapporti di forza tra questi sistemi. Alberi di refutazione di tipo **D, T, K4, S4, S5**. Estrazione di contromodelli del tipo opportuno. Calcoli assiomatici **K, K4, D, T, S4, S5**. Relativi teoremi di validità (speciale).

Derivabilità e deducibilità nei sistemi modali normali **L**. Insiemi **L**-massimali e loro proprietà. Lemma di Lindenbaum. Modello canonico e teorema del modello canonico. Applicazioni del metodo del modello canonico: teoremi di completezza per i sistemi **K, K4, D, T, S4, S5**.

▷ V. appunti manoscritti e dattiloscritti (*La semantica di Kripke*) del docente. Oppure un qualsiasi buon manuale di logica modale (p.es. [4]).

**Linguaggi formali, gerarchia di Chomski, espressioni regolari.** Alfabeti, parole, concatenazione di parole, linguaggi. Operazioni regolari sui linguaggi. Espressioni regolari su un alfabeto finito; linguaggio associato a un’espressione regolare. Regole di produzione e grammatiche generative; linguaggio generato da una grammatica. Grammatiche di tipo 0, di tipo 1 (context-sensitive), di tipo 2 (context-free), di tipo 3 (regolari). Rapporti gerarchici.

▷ V. [1], pp. 39–47 e 50–70 (fotocopie). Oppure [11], Part E (scaricabile). Oppure [7], vol. I, Ch. 7.

**Logica dinamica proposizionale.** Motivazioni intuitive. Linguaggio di **PDL** e operatori definibili (*while, if ... then ... else*, ecc.). Operazioni booleane e peirciane sulle relazioni. Chiusura riflessiva e transitiva di una relazione. Semantica alla Kripke per **PDL**: modelli standard. Il calcolo assiomatico **PDL**. Assiomatizzazioni alternative. Teorema di validità. Fallimento della proprietà di compattezza. Modelli non-standard. Teorema di completezza rispetto ai modelli non-standard

via modello canonico. FL-sottoformule e chiusura di Fischer-Ladner. Completezza rispetto ai modelli standard come applicazione del metodo di filtrazione [idea della dimostrazione]. Decidibilità di **PDL**. Varianti di **PDL** (cenni).

▷ V. appunti manoscritti del docente (*Logica dinamica proposizionale*, pp. 1-68). Oppure il capitolo *The Gamut of Dynamic Logics* in [5] (scaricabile). Oppure [10]. Si suggerisce caldamente la lettura del saggio [12] (fotocopiato).

**FACOLTATIVO.** *Programmi While e Logica di Hoare.*

▷ V. §§ 2.1–2.4 di *The Gamut of Dynamic Logics* in [5] (scaricabile).

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. G. Ausiello et al., **Linguaggi, modelli, complessità**. Franco Angeli 2003
2. S. Buss (Ed.), **Handbook of Proof Theory**. Elsevier 1998
3. E. Casari, **Introduzione alla Logica**. UTET 1997
4. A. Chagrov, M. Zakharyashev, **Modal logic**. Clarendon Press 1997
5. D. Gabbay, J. Woods (eds.), **Handbook of the History of Logic**. Vol. 7: **Logic and the Modalities in the Twentieth Century**. Elsevier 2006
6. J. Gallier, **Logic for computer science. Foundations of automatic theorem proving**. Harper & Row 1986
7. L.T.F. Gamut, **Logic, Language and Meaning**. 2 Vols. The University of Chicago Press 1991.
8. J-Y. Girard, **Proof theory and logical complexity, vol. I**. Bibliopolis 1987
9. M. Szabo (Ed.), **The collected papers of Gerhard Gentzen**. North Holland 1969
10. D. Harel, D. Kozen, J. Tiuryn, **Dynamic Logic**. The MIT Press 2000
11. B. Partee, A. Ter Meulen, R. Wall, **Mathematical Methods in Linguistics**. Kluwer 1990
12. K. Segerberg, *Applying Modal Logic*. *Studia Logica* 2-3 (1980), pp. 275-295
13. G. Takeuti, **Proof Theory**. North Holland 1975 (1986<sup>2</sup>)
14. A. S. Troelstra, H. Schwichtenberg, **Basic Proof Theory**. Cambridge University Press 1996